ACTA
MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

32

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG
1909

BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE.

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B., UPPSALA.

REDACTION

INHALTSVERZEICHNISS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 32. — 1909. — TOME 32.

ÜBER EINE RIEMANN'SCHE FUNKTIONENKLASSE MIT ZERFALLENDER THETAFUNKTION.

VON

HERMANN SCHUMACHER

AUS RUHRORT.

Einleitung.

1. Als »binomisch» bezeichnet man die algebraischen Funktionen von z, die verzweigt sind wie die $n$te Wurzel aus einer rationalen Funktion $f(z)$ von z. Unbeschadet der Allgemeinheit darf man voraussetzen, dass $f(z)$ eine *ganze* Funktion von z ist. Denkt man durch eine passende Substitution 1. Ordnung der Variabeln etwaige Verzweigungspunkte im Unendlichen vorher beseitigt, so ist der Grad dieser ganzen Funktion von z ein Multiplum von n, also etwa $n.m$; ihre Nullpunkte sind dann die Verzweigungspunkte der zu $s = \sqrt[n]{f(z)}$ gehörigen RIEMANN'schen Fläche.

In Übungen über RIEMANN'sche Flächen (S. S. 1905) hat nun Herr Professor Dr. WELLSTEIN durch eine gruppentheoretisch normierte kanonische Zerschneidung der RIEMANN'schen Fläche gezeigt, *dass, u. a. wenn n eine Primzahl ist, und f genau $n.m$ verschiedene Nullpunkte hat, die Periodizitätsmoduln der Integrale 1. Gattung des durch $s = \sqrt[n]{f(z)}$ erzeugten Körpers von nur $n.m - 3$ mit den Verzweigungspunkten veränderlichen Moduln abhängen und zwar im Körper der $n$ten Einheitswurzeln*; $n.m - 3$ ist bekanntlich auch die Anzahl der absoluten Invarianten; den Grund dieses Zusammenhanges hat Herr WELLSTEIN in seiner Arbeit: »Zur Funktionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde» angegeben.[1]

Es war nun von Interesse, die von Herrn WELLSTEIN entwickelte allgemeine Methode an einem speziellen Falle durchzuführen. Nächst dem schon oft untersuchten hyperelliptischen Falle $n = 2$ kam zunächst der Fall $n = 3$ in Betracht, der von anderer Seite bearbeitet wird.[2] Über den Fall $n = 4$, $m = 1$ handelt die

[1] Nova acta Leopoldina, Band 74, No. 2.

[2] Vergl. übrigens: I. WELLSTEIN, Zur Theorie der Funktionenklasse $s^3 = (z - a_1) \ldots (z - a_6)$. Math Annalen. Band 52.

Dissertation von Schulz-Bannehr,[1] die zu dem schönen Resultate führt, dass die dem Geschlecht $p = 3$ angehörige Thetafunktion dieses Falles sich durch drei elliptische Thetafunktionen darstellen lässt, von denen die eine einen allgemeinen, die beiden anderen denselben speziellen Modul besitzen. Der nächste Fall war $n = 5$, wo für $m = 1$ nach dem angegebenen Satze die Thetafunktion von nur zwei absoluten Moduln abhängen muss. Ihr Geschlecht ist $p = 6$. In dem ersten Teil der nachfolgenden Dissertation soll nun zunächst die gruppentheoretisch normierte kanonische Zerschneidung der Riemann'schen Fläche nach den Vorträgen des Herrn Wellstein für den Fall, dass n eine Primzahl und $m = 1$ ist, entwickelt, und dann der Spezialfall $n = 5$, $m = 1$ vollständig durchgeführt werden. Für die Thetafunktion wird in dem speziellen Falle ein fertiger Ausdruck berechnet, der zu einer weiteren Bearbeitung geradezu herausfordert.

2. Zu unserm Beispiele $n = 5$, $m = 1$ führten auch invariantentheoretische Erwägungen. Falls nämlich die Invariante 18. Grades I_{18} von $f(z)$ verschwindet, ohne dass Nullpunkte zusammenfallen, so lassen sich, wie Herr Wellstein in einem Seminarvortrage gezeigt hat, zwei Integrale 1. Gattung auf Integrale eines und desselben Körpers vom Geschlecht $p = 2$ zurückführen. Diese Reduktion wird im zweiten Teil der nachfolgenden Arbeit ausgeführt.

3. Der Spezialfall $I_{18} = 0$ gewinnt hierdurch ein ganz besonderes Interesse, zumal durch das Buch von Krazer[2] die zahlreichen Arbeiten über die Reduzierbarkeit Abel'scher Integrale allgemein zugänglich geworden sind und die Frage der Reduktibilität aktuell gemacht haben. Nach Sätzen von Picard und Poincaré[3] müssen nämlich auch die übrigen vier Integrale 1. Gattung reduzierbar sein und zwar auf das Geschlecht $p = 4$, und die zugehörige Thetafunktion muss zerfallen in Thetafunktionen von den Geschlechtern $p = 2$ und $p = 4$. Während Beispiele zerfallender Thetafunktionen mit einem elliptischen Faktor reichlich vorhanden sind,[4] fehlt es gerade an instruktiven Beispielen für zerfällbare Thetafunktionen mit Faktoren höheren Geschlechts. Um so lieber folgte ich daher der Anregung des Herrn Wellstein, die Zerfällung der Thetafunktion wirklich auszuführen, worüber der dritte Teil der Dissertation handelt.

---

[1] Schulz-Bannehr, Zur Invarianten- und Funktionentheorie einer speziellen Kurve 4. Ordnung. Dissertation, Strassburg i. E. 1904.

[2] A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903.

[3] A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 499, Satz XII und Satz XIII.

[4] Literatur bei Krazer. Ausserdem: V. Doerr, Beitrag zur Lehre vom identischen Verschwinden der Riemann'schen Thetafunktion, Dissertation, Strassburg i. E. 1883.

Erster Teil.

Theorie des allgemeinen Falles ($I_{18} \gtreqless 0$).

§ 1. Ein allgemeines Zerschneidungsprinzip Riemann'scher Flächen mit linearer Transformation in sich.

4. Die folgenden Betrachtungen gelten in einem viel weiteren Umfange, als wir sie wiedergeben; wir beschränken uns der Kürze wegen auf die Grundgleichung:

$$s^n = f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n), \tag{1}$$

die für $n = 5$ unsern speziellen Fall einschliesst, und dürfen, da uns schliesslich nur der Fall $n = 5$ interessieren wird, zur weiteren Vereinfachung der folgenden Überlegungen annehmen, dass n eine Primzahl ist. Die Nullpunkte $a_1, a_2, \dots, a_n$ von $f(z)$ seien alle endlich und voneinander verschieden.

Die zu s gehörige Riemann'sche Fläche besitzt n Blätter und n Verzweigungspunkte. Die n Verzweigungspunkte entsprechen den n Nullpunkten $a_1, a_2, \dots, a_n$ von $f(z)$ und die n Blätter den n Wurzelwerten von s; und zwar ordnen wir, wenn $[s]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[n]{f(z)}$ bedeutet, dem νten Blatte ($\nu = 1, 2, \dots, n$) den Wert

$$s_\nu = \varrho^\nu [s] \tag{2}$$

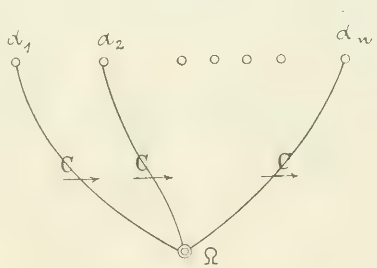
zu, wo

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{3}$$

ist.

Die Verzweigungslinien denken wir uns so gelegt, dass sie von den Verzweigungspunkten ausgehend nach einem Punkte Ω konvergieren, der kein Verzweigungspunkt ist. Dann hängen die n Blätter längs den Verzweigungslinien in gleicher Weise zusammen, und zwar permutieren sich die n Zweige (2) von s, wenn man bei positiver Umkreisung (entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers) eines Ver-

· FIGUR · 1 ·



zweigungspunktes die zugehörige Verzweigungslinie überschreitet, nach dem Zyklus

$$C = (1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

Das Geschlecht der RIEMANN'schen Fläche ist

$$p = (n-2)\frac{n-1}{2} \tag{5}$$

nach der Formel

$$2p = w - 2(n-1), \tag{6}$$

wo w die Summe der Ordnungen der einzelnen Verzweigungspunkte bedeutet.

Zu der durch die Gl. (1) erzeugten Funktionenklasse gehören also $p = (n-2)\frac{n-1}{2}$ linear unabhängige ABEL'sche Integrale 1. Gattung, die in irgend einer Gestalt mit u_μ $(\mu = 1, 2, \dots, p)$ bezeichnet seien.

5. Um diese Integrale auf der RIEMANN'schen Fläche eindeutig zu machen, ist ein Querschnittsystem S erforderlich, das aus $p = (n-2)\frac{n-1}{2}$ Querschnittpaaren a, b besteht. Wendet man die Abbildung

$$s' = s \,.\, \varrho, \tag{7}$$

durch die die Grundgleichung (1) in sich selbst übergeht, auf die RIEMANN'sche Fläche an, so geht auch diese in sich über, indem jedes einzelne Blatt in das zyklisch folgende verwandelt wird. Jede geschlossene Kurve λ bildet sich also auf eine Kurve λ' ab, die kongruent mit λ immer im zyklisch folgenden Blatte verläuft. Das Querschnittsystem S, das wir jetzt mit $S^{(1)}$ bezeichnen wollen, geht also durch die Abbildung (7) in ein neues System $S^{(2)}$ über, dessen einzelne Schnitte kongruent mit denen von $S^{(1)}$, aber immer im zyklisch folgenden Blatte verlaufen. Wir wollen sagen, $S^{(1)}$ wird durch die Abbildung (7) »*um ein Blatt verschoben*». Wendet man die Abbildung (7) wiederholt an, so durchläuft $S^{(1)}$ nacheinander die Lagen $S^{(2)}, S^{(3)}, \dots, S^{(n)}, S^{(n+1)}, \dots$, wo

$$S^{(n+1)} = S^{(1)}$$

ist. *$S^{(1)}$ erfährt also eine Gruppe zyklischer Verschiebungen.*

Nun habe das Integral 1. Gattung u_μ die Periodizitätsmoduln ($\mu = 1, 2, \dots, p$; $\nu = 1, 2, \dots, n$)

$$\omega_{\mu 1}^{(\nu)}, \omega_{\mu 2}^{(\nu)}, \dots, \omega_{\mu p}^{(\nu)} \text{ an den Schnitten } a_\mu^{(\nu)}.$$

und

$$\omega^{(\nu)}_{\mu,\, p+1},\quad \omega^{(\nu)}_{\mu,\, p+2}, \ldots, \omega^{(\nu)}_{\mu,\, 2p} \text{ an den Schnitten } b^{(\nu)}_{\mu},$$

die zusammen das Schnittsystem $S^{(\nu)}$ bilden. Dann lassen sich die Periodizitätsmoduln des Schnittsystems $S^{(\nu+1)}$ linear und homogen mit ganzzahligen Koeffizienten durch die Periodizitätsmoduln des Schnittsystem $S^{(\nu)}$ ausdrücken, und zwar sind die ganzzahligen Koeffizienten dieselben für jeden Wert von ν. Also für $\nu = 1$ z. B. $(\lambda = 1, 2, \ldots, 2p)$:

$$\omega^{(2)}_{\mu\lambda} = c_{1\lambda}\, \omega^{(1)}_{\mu 1} + c_{2\lambda}\, \omega^{(1)}_{\mu 2} + \ldots + c_{2p,\,\lambda}\, \omega^{(1)}_{\mu,\, 2p} \tag{8}$$

oder symbolisch:

$$\left| \omega^{(2)}_{\mu} \right| = \mathfrak{C} \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right|,$$

wo $\mathfrak{C}$ die Matrix:

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{2p,\,1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{2p,\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1,\,2p} & c_{2,\,2p} & \ldots & c_{2p,\,2p} \end{vmatrix} \tag{9}$$

bedeutet. Analog ist:

$$\left| \omega^{(3)}_{\mu} \right| = \mathfrak{C} \left| \omega^{(2)}_{\mu} \right|$$

u. s. f. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left| \omega^{(2)}_{\mu} \right| &= \mathfrak{C} \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right| \\ \left| \omega^{(3)}_{\mu} \right| &= \mathfrak{C}^2 \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right| \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \left| \omega^{(n)}_{\mu} \right| &= \mathfrak{C}^{n-1} \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right| \\ \left| \omega^{(n+1)}_{\mu} \right| &= \mathfrak{C}^{n} \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right|. \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\left| \omega^{(n+1)}_{\mu} \right| = \left| \omega^{(1)}_{\mu} \right|;$$

also ist

$$\mathfrak{C}^n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \mathfrak{E}$$

die Einheitsmatrix. *Es bilden also:*

(10) $$\mathfrak{E},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{C}^2,\ \ldots,\ \mathfrak{C}^{n-1}$$

bei multiplikativer Zusammensetzung eine Gruppe, die der Gruppe der zyklischen Verschiebungen, die das Querschnittsystem S erfährt, isomorph ist.

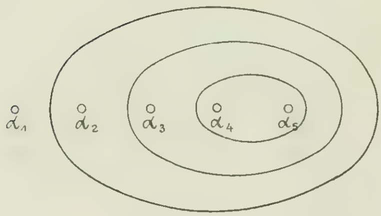
6. *Die Gruppe* (10) *ist nach der von* Loewy *eingeführten Sprechweise »unter Hervorhebung ihrer irreduziblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe» transformierbar, und zwar besitzt sie noch die besondere Eigenschaft, die* Loewy *»vollständig reduzibel»*[1] *nennt.*

Die vollständige Reduktion der Gruppe (10) *können wir unmittelbar durch eine geeignete Anlage des Querschnittsystems erzielen, und zwar in umfassendster Allgemeinheit auf folgende Weise:*

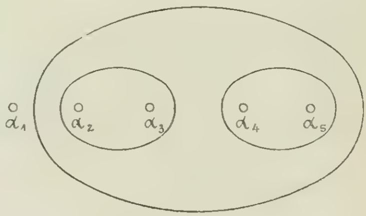
Wir denken uns über der Riemann'schen Fläche eine Ebene ausgebreitet und in ihr die Verzweigungspunkte eingetragen; die Verzweigungspunkte umgeben wir *mit der grössten Anzahl* verschiedener »Ovale», die einander nicht schneiden und die Eigenschaften besitzen:

1. Ein Oval soll mindestens zwei Verzweigungspunkte einschliessen.

·FIGUR· 2a·



·FIGUR· 2b·



[1] Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses 1904. S. 196. Vergl. ausserdem folgende Arbeiten von Loewy: 1. Zur Gruppentheorie, Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, V. 3. und 4. Heft. 2. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1902. Heft 1. 3. Zur Gruppentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, Transactions of the american mathematical society, January 1904. 4. Über die vollständig reduziblen Gruppen, die zu einer Gruppe linearer homogener Substitutionen gehören, Transactions of the american mathematical society, October 1905. 5. Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Mathemat. Annalen, Band 56. 6. Über vollständig reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Mathemat. Annalen, Band 62.

2. Zwei Ovale gelten als voneinander verschieden, wenn das eine wenigstens einen Verzweigungspunkt enthält, der von dem andern nicht eingeschlossen wird.

3. Einer und nur einer der Verzweigungspunkte soll von keinem Oval eingeschlossen werden.

Fig. 2a und 2b zeigen für $n=5$ die möglichen Lagen der Ovale, insoweit sie typisch verschieden sind.

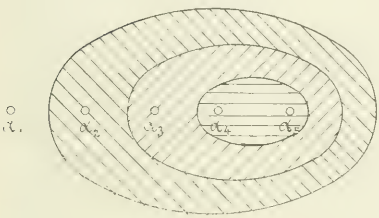
Die Anzahl dieser Ovale ist, wie man durch einen Schluss von ν auf $\nu+1$ leicht einsieht, gleich $n-2$.

Jedes Oval O kann seinerseits Ovale u. s. f. einschliessen. (Vergl. Fig. 2a und 2b.) Wir wollen ein Oval in O, das von keinem andern Oval in O eingeschlossen wird, ein »grösstes Oval in O« nennen; O kann höchstens zwei solche grösste Ovale einschliessen; also enthält ein Oval

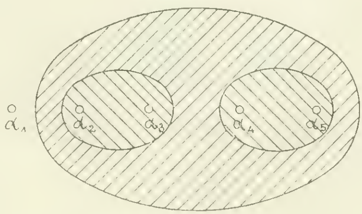
1. entweder zwei Verzweigungspunkte, oder
2. einen Verzweigungspunkt und ein grösstes Oval, oder
3. zwei grösste Ovale.

Durch diese $n-2$ Ovale wird die Ebene in $n-2$ »Parzellen» eingeteilt, wenn wir unter einer Parzelle den Teil der Ebene verstehen, der zwischen einem Oval und seinen grössten Ovalen enthalten ist; der äussere Raum mit dem einen nicht

·FIGUR· 3a·



·FIGUR· 3b·

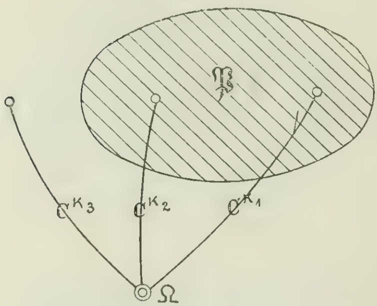


eingeschlossenen Verzweigungspunkt wird also nicht als Parzelle mitgezählt. Fig. 3a und 3b heben diese Parzellen für den Fall $n=5$ durch verschiedene Schraffierung hervor.

Diese Parzellen übertragen wir nun auf die Riemann'sche Fläche. Dabei bildet sich jede Parzelle auf alle n-Blätter ab, und dieses Bild nennen wir kurz wiederum eine Parzelle. Eine Parzelle der Riemann'schen Fläche besteht also aus n übereinander liegenden Schichten, und solcher Parzellen gibt es $n-2$.

Betrachten wir nun die Riemann'sche Fläche daraufhin, wieviel Querschnitte sich in einer Parzelle $\mathfrak{P}$ anlegen lassen, so liegen die Verhältnisse ähnlich, als wenn wir eine Riemann'sche Fläche mit nur drei Verzweigungspunkten hätten. Denn sollen die Querschnitte ganz innerhalb $\mathfrak{P}$ liegen, so dürfen sie sowohl das $\mathfrak{P}$ umgebende Oval O, als auch die in O liegenden grössten Ovale nicht schneiden. Umkreisen nun die Querschnitte ein in O liegendes grösstes Oval O_1, so überschreiten sie soviel Verzweigungslinien, als Verzweigungspunkte in demselben enthalten sind, falls der Punkt Ω, von dem alle Verzweigungslinien ausstrahlen, ausserhalb sämtlicher Ovale liegt. Dieselbe Wirkung erzielen wir aber, wenn wir die $\varkappa_1$ Verzweigungspunkte, die in dem Ovale O_1 liegen, in einen Punkt zusammenfallen lassen, und die Blätter der Riemann'schen Fläche längs der neuen Verzweigungslinie nach dem Zyklus $C^{\varkappa_1}$ aneinander heften; enthält $\mathfrak{P}$ noch ein zweites grösstes Oval O_2, so darf ein in $\mathfrak{P}$ liegender Querschnitt auch nicht in O_2 eindringen; wir lassen daher auch die in O_2 liegenden $\varkappa_2$-Verzweigungspunkte in einen zusammenfallen, dessen Verzweigungslinie die Blätter nach dem Zyklus $C^{\varkappa_2}$ verbindet. Da ein *in* $\mathfrak{P}$ verlaufender Querschnitt auch die äussere Grenze von $\mathfrak{P}$ nicht überschreiten darf, so verläuft er so, als wenn auch alle ausserhalb $\mathfrak{P}$ liegenden Verzweigungspunkte — ihre Anzahl sei $\varkappa_3$ — in einen zusammengefallen wären. Die *in* $\mathfrak{P}$ verlaufenden Querschnitte sind demnach genau so anzulegen, als wenn die Riemann'sche Fläche, wie in Fig. 4, nur drei Verzweigungspunkte und drei Verzweigungslinien mit den Zyklen $C^{\varkappa_1}$, $C^{\varkappa_2}$ und $C^{\varkappa_3}$ hätte, $(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = n)$ und $\mathfrak{P}$ nur zwei dieser Verzweigungspunkte einschlösse. Enthält $\mathfrak{P}$ ursprünglich nur ein grösstes Oval oder keines, so liegen ausserdem noch ein, bezw. zwei Verzweigungspunkte in $\mathfrak{P}$, und von den Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind dann eine, bezw. beide gleich 1. Da nun n als Primzahl vorausgesetzt wird, so kann keiner der Zyklen $C^{\varkappa_1}$, $C^{\varkappa_2}$ und $C^{\varkappa_3}$ zerfallen; die drei Verzweigungspunkte zählen also je für $n - 1$ einfache, und daher ist das Geschlecht der vereinfachten Riemann'schen Fläche

·FIGVR· 4·



$$p = \frac{n - 1}{2} \tag{11}$$

nach Gl. (6). Es sind also $\pi = \frac{n-1}{2}$ Querschnittpaare erforderlich, um diese Riemann'sche Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Diese Querschnitte lassen sich auch in der ursprünglichen Parzelle $\mathfrak{P}$ anlegen, wo die Ovale O_1 und O_2 die Rolle der Verzweigungspunkte mit den Zyklen C^{χ_1}, C^{χ_2} spielen; da aber jeder der drei übrig bleibenden Verzweigungspunkte von der $(n-1)$ten Ordnung ist, *so sind in jeder der $n-2$ Parzellen $\pi = \frac{n-1}{2}$ Querschnittpaare möglich, zusammen also $(n-2)\pi = p$ Querschnittpaare;* da keines dieser Schnittpaare die Fläche zerstückelt, ihre Anzahl aber $p = (n-2)\frac{n-1}{2}$ ist, so reichen sie aus (vergl. S. 7), um die Integrale u_μ auf der ursprünglichen Riemann'schen Fläche eindeutig zu machen. Es zerfällt also das so angelegte Querschnittsystem S in $n-2$ Teilsysteme $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ von je $\frac{n-1}{2}$ Querschnittpaaren, von denen jedes für sich in einer Parzelle liegt. *Daher erfährt jedes Teilsystem $S_h (h = 1, 2, \ldots, n-2)$ durch die Abbildung (7) eine Gruppe zyklischer Verschiebungen $S_h^{(1)}, S_h^{(2)}, \ldots, S_h^{(n)}$ und zwar so, dass kein Querschnitt des einen Teilsystems bei diesen Verschiebungen einen Querschnitt eines anderen Teilsystemes schneidet.* Infolgedessen drücken sich die Periodizitätsmoduln eines Integrales 1. Gattung in den $\pi = \frac{n-1}{2}$ Schnittpaaren eines Teilsystems $S_h^{(\nu+1)}$ allein durch die Periodizitätsmoduln der vorhergehenden Lage desselben Teilsystems, also durch die Periodizitätsmoduln desselben Integrals an den Schnitten von $S_h^{(\nu)}$ aus, d. h. die Matrix $\mathfrak{S}$ [Gl. (9)] zerfällt in $n-2$ Teilmatrizen $\mathfrak{S}_h (h = 1, 2, \ldots, n-2)$ nach dem Schema

$$\mathfrak{S} = \begin{vmatrix} \mathfrak{S}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathfrak{S}_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathfrak{S}_{n-2} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Bezeichnet nun $\mathfrak{E}_h$ die zu $\mathfrak{S}_h$ gehörige Einheitsmatrix, so bilden also

$$\mathfrak{E}_h, \mathfrak{S}_h, \mathfrak{S}_h^2, \ldots, \mathfrak{S}_h^{n-1}, (h = 1, 2, \ldots, n-2)$$

bei multiplikativer Zusammensetzung die »irreduziblen Bestandteile« der Gruppe (10), *die wir durch die spezielle Anlage des Querschnittsystems »hervorgehoben« haben.*

§ 2. Die Riemann'sche Fläche und die Integrale 1. Gattung für den Fall $n=5$.

7. Wir betrachten nunmehr den speziellen Fall $n=5$. Unsere Grundgleichung (1) § 1 nimmt dann die Form

$$(1) \qquad s^5 = f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)(z-\alpha_5)$$

an. Zu s gehört eine fünfblättrige Riemann'sche Fläche mit den fünf Verzweigungspunkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und α_5, von denen wir wieder voraussetzen, dass sie endlich und voneinander verschieden sind. Ist $[s]$ die eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[5]{f(z)}$, so ordnen wir dem νten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) der Riemann-schen Fläche den Wert

$$(2) \qquad s_\nu = \varrho^\nu [s]$$

zu, wo

$$(3) \qquad \varrho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

ist. Die Verzweigungslinien lassen wir von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ ausgehend nach einem Punkte Ω konvergieren, der kein Verzweigungspunkt ist (vergl. Fig. 1); dann permutieren sich die fünf Zweige s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 von s, wenn man bei positiver Umkreisung eines Verzweigungspunktes die zugehörige Verzweigungslinie überschreitet, nach dem Zyklus

$$(4) \qquad C = (1, 2, 3, 4, 5).$$

Das Geschlecht dieser Riemann'schen Fläche ist nach Gl. (6) § 1

$$p = 6.$$

Demnach gehören zu der durch die Gl. (1) erzeugten Funktionenklasse sechs linear unabhängige Abel'sche Integrale 1. Gattung. Als solche kann man wählen:

$$(5) \qquad \begin{cases} U = \int \frac{dz}{s^2}; \\ V_1 = \int \frac{z\,dz}{s^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3}; \\ W_1 = \int \frac{z^2\,dz}{s^4}, \; W_2 = \int \frac{z\,dz}{s^4}, \; W_3 = \int \frac{dz}{s^4}. \end{cases}$$

Diese Integrale wollen wir »Fundamentalintegrale« nennen, und zwar U ein Integral 1. Art, V_1 und V_2 Integrale 2. Art und W_1, W_2 und W_3 Integrale 3. Art.

8. Um diese sechs Integrale auf der Riemann'schen Fläche eindeutig zu machen, ist ein Querschnittsystem S von sechs Paar kanonischen Querschnitten erforderlich. Fig. 5 (siehe Anhang) veranschaulicht die von uns benutzte kanonische Zerschneidung, die nach den im § 1 entwickelten allgemeinen Prinzipien ausgeführt ist, und zwar ist die durch Fig. 3b dargestellte Lage der Parzellen benutzt. Im Interesse der Zeichnung ist angenommen, dass die Punkte α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 auf einer Geraden liegen; liegen sie nicht auf einer Geraden, so werden die Schnitte entsprechend verzerrt (vergl. Fig. 14, Anhang).

Das Schnittsystem S zerfällt in drei Teilsysteme,

S_1	bestehend aus den Schnittpaaren	a_1, b_1 und	a_4, b_4,
S_2	» » » »	a_2, b_2 »	a_5, b_5,
S_3	» » » »	a_3, b_3 »	a_6, b_6.

Die ersten drei Schnitte eines jeden Teilsystemes hat man sich kongruent übereinander herlaufend zu denken, also:

$$a_1 \cong b_1 \cong a_4,$$
$$a_2 \cong b_2 \cong a_5,$$
$$a_3 \cong b_3 \cong a_6.$$

Ebenso könnte man sich auch die Teile des vierten Schnittes eines jeden Teilsystems, die in Fig. 5 nebeneinander gezeichnet sind, kongruent übereinander herlaufend denken, woraus jedoch keine weiteren Schlüsse gezogen werden. S_2 ist eine Wiederholung von S_1, die durch die Benutzung der in Fig. 3b dargestellten Lage der Parzellen möglich wurde; S_3 ist nach demselben Prinzip angelegt wie S_1 und S_2. Die Pfeile an den Schnitten sind so gewählt, dass man bei einer positiven Umlaufung der Fläche T', wie wir nach Riemann die Riemann'sche Fläche nach Ausführung der Zerschneidung nennen wollen, die linken Ufer der Schnitte, die wir als die positiven bezeichnen, in der Richtung der Pfeile, und die rechten Ufer der Schnitte, die wir als die negativen bezeichnen, in der entgegengesetzten Richtung zu durchlaufen hat. Wenn man also über einen a-Schnitt in der Richtung des Pfeils integriert, so erhält man den positiven Periodizitätsmodul an dem zugehörigen b-Schnitt, und wenn man über einen b-Schnitt in der Richtung des Pfeils integriert, so erhält man den negativen Periodizitätsmodul an dem zugehörigen a-Schnitt.[1]

Wie bereits bemerkt, sind die Schnitte jedes der Paare

$$a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ a_3,\ b_3$$

[1] C. Neumann, Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale, 2. Aufl. Leipzig, 1884, S. 175, § 10.

aneinander kongruent. Man kann die Zerschneidung auch so einrichten, dass die Schnitte jedes der übrigen Paare

$$a_4,\ b_4;\ a_5,\ b_5;\ a_6,\ b_6$$

ebenfalls einander kongruent sind, d. h. *man könnte die Fläche so zerschneiden, dass die Schnitte jedes Paares* a_μ, b_μ, ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) *kongruent zueinander verlaufen;* wir brauchen nur die Schnitte a_4, a_5 und a_6, bezw. kongruent zu den Schnitten b_4, b_5 und b_6 zu machen. Vergl. Fig. 5a und 5b, von denen

·FIGVR·5a·

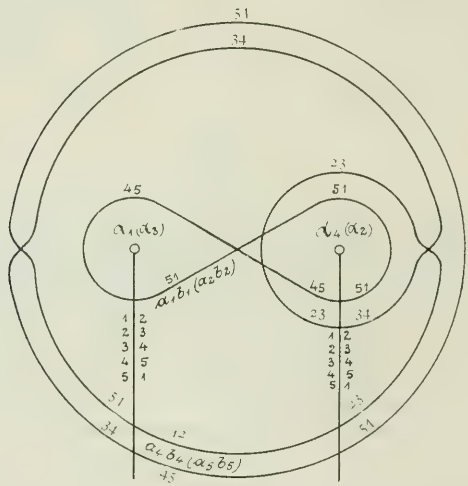


Fig. 5a die Teilsysteme S_1 und S_2, Fig. 5b das Teilsystem S_3 darstellt, das übrigens auch der Form nach mit S_1 und S_2 übereinstimmend angelegt werden könnte. (In Fig. 5 natürlich auch.) Dabei sind zur Vereinfachung der Figuren die Schnitte jedes Paares, da sie ohnehin kongruent sind, durch *eine* Kurve wiedergegeben. Von den beigefügten Zahlen gibt die erste das Blatt an, in dem der betreffende Schnitt a, die zweite das Blatt, in dem der Schnitt b verläuft. Eine einzige Angabe dieser Art hätte übrigens genügt. Sämtliche Schnitte können in der mannigfachsten Weise stetig deformiert werden, ohne dass die Resultate unserer Untersuchung eine Änderung erleiden.

§ 3. Die Periodizitätsmoduln.

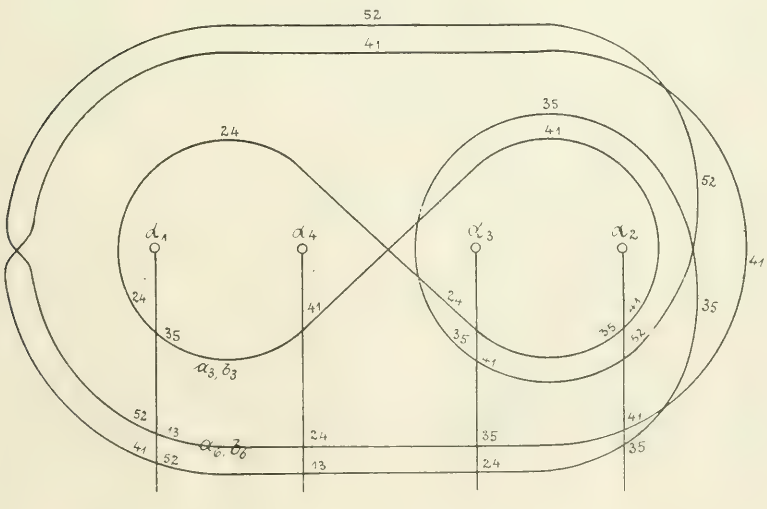
9. Die Periodizitätsmoduln der sechs Fundamental-Integrale 1. Gattung U, V_1, V_2, W_1, W_2 und W_3 an den zwölf Schnitten a_μ und b_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) seien:

I

	a_μ	b_μ
$\overset{+}{U} - \overset{-}{U}$	$A_{1\mu}$	$B_{1\mu}$
$\overset{+}{V}_1 - \overset{-}{V}_1$	$A_{2\mu}$	$B_{2\mu}$
$\overset{+}{V}_2 - \overset{-}{V}_2$	$A_{3\mu}$	$B_{3\mu}$
$\overset{+}{W}_1 - \overset{-}{W}_1$	$A_{4\mu}$	$B_{4\mu}$
$\overset{+}{W}_2 - \overset{-}{W}_2$	$A_{5\mu}$	$B_{5\mu}$
$\overset{+}{W}_3 - \overset{-}{W}_3$	$A_{6\mu}$	$B_{6\mu}$

Diese 72 Periodizitätsmoduln lassen sich nach den im § 1 gemachten Bemerkungen allein infolge der besonderen Anlage des Querschnittsystems auf 18 reduzieren.

·FIGVR· 5b·



Es verhält sich nämlich der Wert von s in einem Punkte P der Riemann'schen Fläche zu dem Wert von s in dem im νten zyklisch folgenden Blatte kongruent zu P liegenden Punkte $P^{(\nu)}$ wie $1 : \varrho^{\nu}$. Mithin verhält sich der Wert des Differentials eines Integrals der $r$ten Art in P zu dem Wert desselben Differentials in $P^{(\nu)}$ wie

$$\left(\frac{\varrho^{\nu}}{1}\right)^{r+1} = \varrho^{\nu(r+1)} : 1 . \tag{1}$$

Der Wert dieses Verhältnisses ändert sich nicht, wenn P und $P^{(\nu)}$ kongruent übereinander liegen bleibend irgendwelche Wege beschreiben, die nicht durch die Verzweigungspunkte gehen. Nun verlaufen aber die Schnitte b_λ $(\lambda = 1, 2)$ bezw. b_3 kongruent und gleichgerichtet mit a_λ bezw. a_6, und zwar im zyklisch folgenden Blatte, und b_3 kongruent und gleichgerichtet mit a_3, und zwar im zweiten auf a_3 zyklisch folgenden Blatte (vergl. Fig. 5). Also ergibt sich für ein Integral der $r$ten Art $(\lambda = 1, 2;\ \mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$:

$$\frac{\int\limits_{a_\lambda}}{\int\limits_{b_\lambda}} = -\frac{B_{\mu\lambda}}{A_{\mu\lambda}} = \varrho^{r+1}, \quad \frac{\int\limits_{a_6}}{\int\limits_{b_3}} = -\frac{B_{\mu 6}}{A_{\mu 3}} = \varrho^{r+1}$$

und

$$\frac{\int\limits_{a_3}}{\int\limits_{b_3}} = -\frac{B_{\mu 3}}{A_{\mu 3}} = \varrho^{2(r+1)} .$$

Hieraus folgen die Gleichungen: $(\lambda = 1, 2)$

$$\left\{\begin{aligned} & B_{1\lambda} = -\varrho^2 A_{1\lambda}; \\ & B_{2\lambda} = -\varrho^3 A_{2\lambda},\ B_{3\lambda} = -\varrho^3 A_{3\lambda}; \\ & B_{4\lambda} = -\varrho^4 A_{4\lambda},\ B_{5\lambda} = -\varrho^4 A_{5\lambda},\ B_{6\lambda} = -\varrho^4 A_{6\lambda}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} & B_{16} = -\varrho^2 A_{13}; \\ & B_{26} = -\varrho^3 A_{23},\ B_{36} = -\varrho^3 A_{33}; \\ & B_{46} = -\varrho^4 A_{43},\ B_{56} = -\varrho^4 A_{53},\ B_{66} = -\varrho^4 A_{63}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} & B_{13} = -\varrho^4 A_{13}; \\ & B_{23} = -\varrho\ A_{23},\ B_{33} = -\varrho A_{33}. \\ & B_{43} = -\varrho^3 A_{43},\ B_{53} = -\varrho^3 A_{53},\ B_{63} = -\varrho^3 A_{63}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

10. Weitere Gleichungen zwischen den Periodizitätsmoduln erhalten wir, wenn wir auf die RIEMANN'sche Fläche die Abbildung (7), § 1, anwenden. Dadurch entsteht auch zu jedem der RIEMANN'schen Schnitte, zu dem im Schnittsystem S (Fig. 5) kein kongruent mit ihm verlaufender vorhanden ist, ein immer im zyklisch folgenden Blatt verlaufender kongruenter Schnitt. Dieser kongruente Schnitt wird im allgemeinen an mehreren Stellen auf Schnitte des Systems S stossen und zwar nach § 1 immer nur auf Schnitte desselben Teilsystems. Verfolgt man nun jedes Mal, wo man auf einen der RIEMANN'schen Schnitte stösst, diesen, jedoch ohne ihn zu überschreiten, bis zum Schnittpunkt mit dem zu ihm gehörenden anderen RIEMANN'schen Schnitt, und verfolgt man dann diesen, wiederum ohne ihn zu überschreiten, u. s. f., so gelangt man schliesslich an den Punkt, der dem Punkte gegenüberliegt, in dem man zuerst auf einen der RIEMANN'schen Schnitte des Systems S stiess; setzt man nun den ursprünglichen Weg fort, u. s. w., dann erhält man schliesslich einen geschlossenen Weg, der ganz in der Fläche T'' verläuft. Das Integral über diesen Weg ist also null.

Ist $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 4, 5)$ der zu $a_\varkappa$ immer im zyklisch folgenden Blatt verlaufende kongruente Schnitt, dann ist:

(5) $$\int\limits_{a_\varkappa} + \int\limits_{b_{\varkappa-3}} + \int\limits_{\alpha_\varkappa} - \int\limits_{b_\varkappa} = 0,$$

oder: $(\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

(5a) $$\int\limits_{\alpha_\varkappa} - A_{\mu,\,\varkappa-3} + B_{\mu\varkappa} + A_{\mu\varkappa} = 0.$$

Nun ist nach Gl. (1) für ein Integral $r$ter Art:

$$\frac{\int\limits_{\alpha_\varkappa}}{\int\limits_{a_\varkappa}} = \varrho^{r+1}, \text{ also } \int\limits_{\alpha_\varkappa} = \varrho^{-(r+1)} B_{\mu\varkappa}.$$

Folglich ist:

(5b) $$\varrho^{-(r+1)} B_{\mu\varkappa} - A_{\mu,\,\varkappa-3} + B_{\mu\varkappa} + A_{\mu\varkappa} = 0,$$

oder:

(6) $$\left\{\begin{array}{ll} A_{1,\,\varkappa-3} - A_{1\varkappa} - B_{1\varkappa}(1+\varrho^3) = 0, & A_{4,\,\varkappa-3} - A_{4\varkappa} - B_{4\varkappa}(1+\varrho) = 0, \\ A_{2,\,\varkappa-3} - A_{2\varkappa} - B_{2\varkappa}(1+\varrho^2) = 0, & A_{5,\,\varkappa-3} - A_{5\varkappa} - B_{5\varkappa}(1+\varrho) = 0, \\ A_{3,\,\varkappa-3} - A_{3\varkappa} - B_{3\varkappa}(1+\varrho^2) = 0, & A_{6,\,\varkappa-3} - A_{6\varkappa} - B_{6\varkappa}(1+\varrho) = 0. \end{array}\right.$$

Ferner ergibt sich für einen zu $b_\varkappa$ $(\varkappa = 4, 5)$ im zyklisch folgenden Blatt kongruent verlaufenden Weg $\beta_\varkappa$:

$$(7) \qquad \int\limits_{\beta_\varkappa} + \int\limits_{b_{\varkappa-3}} + \int\limits_{a_\varkappa} = 0.$$

Also:

$$(7\,\mathrm{a}) \qquad \int\limits_{\beta_\varkappa} - A_{\mu,\,\varkappa-3} + B_{\mu\varkappa} = 0.$$

Für ein Integral $r$ter Art ist aber:

$$\int\limits_{\beta_\varkappa} = -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu\varkappa}.$$

Folglich:

$$(7\,\mathrm{b}) \qquad -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu\varkappa} - A_{\mu,\varkappa-3} + B_{\mu\varkappa} = 0,$$

oder:

$$(8) \qquad \begin{cases} A_{1,\,\varkappa-3} + \varrho^3 A_{1\varkappa} - B_{1\varkappa} = 0, & A_{4,\,\varkappa-3} + \varrho A_{4\varkappa} - B_{4\varkappa} = 0, \\ A_{2,\,\varkappa-3} + \varrho^2 A_{2\varkappa} - B_{2\varkappa} = 0, & A_{5,\,\varkappa-3} + \varrho A_{5\varkappa} - B_{5\varkappa} = 0, \\ A_{3,\,\varkappa-3} + \varrho^2 A_{3\varkappa} - B_{3\varkappa} = 0, & A_{6,\,\varkappa-3} + \varrho A_{6\varkappa} - B_{6\varkappa} = 0. \end{cases}$$

Schliesslich sei β_6 der kongruent zu b_6 im zyklisch folgenden Blatt verlaufende Schnitt. Dann ist:

$$(9) \qquad \int\limits_{\beta_6} + \int\limits_{a_3} + \int\limits_{a_6} = 0.$$

Also:

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad \int\limits_{\beta_6} + B_{\mu 3} + B_{\mu 6} = 0.$$

Da nun für ein Integral $r$ter Art

$$\int\limits_{\beta_6} = -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu 6}$$

ist, so ist:

$$(9\,\mathrm{b}) \qquad -\varrho^{-(r+1)} A_{\mu 6} + B_{\mu 3} + B_{\mu 6} = 0,$$

oder:

$$(10)\qquad \begin{cases} \varrho^3 A_{16} - B_{13} - B_{16} = 0, & \varrho A_{46} - B_{43} - B_{46} = 0, \\ \varrho^2 A_{26} - B_{23} - B_{26} = 0, & \varrho A_{56} - B_{53} - B_{56} = 0, \\ \varrho^2 A_{36} - B_{33} - B_{36} = 0, & \varrho A_{66} - B_{63} - B_{66} = 0. \end{cases}$$

11. Aus den Gl. (6) und (8) ergibt sich: $(\varkappa = 4, 5)$

$$(11)\qquad \begin{cases} A_{1\varkappa} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{1,\varkappa-3}, & A_{4\varkappa} = -(\varrho + \varrho^4) A_{4,\varkappa-3}, \\ A_{2\varkappa} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{2,\varkappa-3}, & A_{5\varkappa} = -(\varrho + \varrho^4) A_{5,\varkappa-3}, \\ A_{3\varkappa} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{3,\varkappa-3}, & A_{6\varkappa} = -(\varrho + \varrho^4) A_{6,\varkappa-3}. \end{cases}$$

Aus den Gl. (3), (4) und (10) folgt:

$$(12)\qquad \begin{cases} A_{16} = -(\varrho + \varrho^4) A_{13}, & A_{46} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{43}, \\ A_{26} = -(\varrho + \varrho^4) A_{23}, & A_{56} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{53}, \\ A_{36} = -(\varrho + \varrho^4) A_{33}, & A_{66} = -(\varrho^2 + \varrho^3) A_{63}. \end{cases}$$

Die Gl. (6) und (11) ergeben: $(\varkappa = 4, 5)$

$$(13)\qquad \begin{cases} B_{1\varkappa} = -\varrho A_{1,\varkappa-3}; \\ B_{2\varkappa} = -\varrho^4 A_{2,\varkappa-3}, \; B_{3\varkappa} = -\varrho^4 A_{3,\varkappa-3}; \\ B_{4\varkappa} = -\varrho^2 A_{4,\varkappa-3}, \; B_{5\varkappa} = -\varrho^2 A_{5,\varkappa-3}, \; B_{6\varkappa} = -\varrho^2 A_{6,\varkappa-3}. \end{cases}$$

Folglich ergeben die Gleichungen (2), (3), (4), (11), (12) und (13) statt der Tabelle I folgendes Periodenschema:

II.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U} - \overset{-}{U}$	A_{11}	A_{12}	A_{13}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{11}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{12}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{13}$
$\overset{+}{V}_1 - \overset{-}{V}_1$	A_{21}	A_{22}	A_{23}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{21}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{22}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{23}$
$\overset{+}{V}_2 - \overset{-}{V}_2$	A_{31}	A_{32}	A_{33}	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{31}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{32}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{33}$
$\overset{+}{W}_1 - \overset{-}{W}_1$	A_{41}	A_{42}	A_{43}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{41}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{42}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{43}$
$\overset{+}{W}_2 - \overset{-}{W}_2$	A_{51}	A_{52}	A_{53}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{51}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{52}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{53}$
$\overset{+}{W}_3 - \overset{-}{W}_3$	A_{61}	A_{62}	A_{63}	$-(\varrho + \varrho^4) A_{61}$	$-(\varrho + \varrho^4) A_{62}$	$-(\varrho^2 + \varrho^3) A_{63}$

an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{U}-\overset{-}{U}$	$-\varrho^2 A_{11}$	$-\varrho^2 A_{12}$	$-\varrho^4 A_{13}$	$-\varrho\ A_{11}$	$-\varrho\ A_{12}$	$-\varrho^2 A_{13}$
$\overset{+}{V}_1-\overset{-}{V}_1$	$-\varrho^3 A_{21}$	$-\varrho^3 A_{22}$	$-\varrho\ A_{23}$	$-\varrho^4 A_{21}$	$-\varrho^4 A_{22}$	$-\varrho^3 A_{23}$
$\overset{+}{V}_2-\overset{-}{V}_2$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{32}$	$-\varrho\ A_{33}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^4 A_{32}$	$-\varrho^3 A_{33}$
$\overset{+}{W}_1-\overset{-}{W}_1$	$-\varrho^4 A_{41}$	$-\varrho^4 A_{42}$	$-\varrho^3 A_{43}$	$-\varrho^2 A_{41}$	$-\varrho^2 A_{42}$	$-\varrho^4 A_{43}$
$\overset{+}{W}_2-\overset{-}{W}_2$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{52}$	$-\varrho^3 A_{53}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^2 A_{52}$	$-\varrho^4 A_{53}$
$\overset{+}{W}_3-\overset{-}{W}_3$	$-\varrho^4 A_{61}$	$-\varrho^4 A_{62}$	$-\varrho^3 A_{63}$	$-\varrho^2 A_{61}$	$-\varrho^2 A_{62}$	$-\varrho^4 A_{63}$

worin also nur noch die Periodizitätsmoduln der sechs Integrale 1. Gattung an den drei Schnitten a_1, a_2 und a_3 vorkommen, die bezw. den Teilsystemen S_1, S_2 und S_3 angehören.

§. 4. **Die Normalintegrale 1. Gattung.**

12. *Die bisher abgeleiteten Periodenrelationen sind lediglich eine Folge der Abbildbarkeit der Riemann'schen Fläche auf sich. Es gibt aber noch eine Reihe weiterer Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln der Integrale 1. Gattung, die nicht aus der speziellen Natur des vorliegenden algebraischen Gebildes, sondern aus dem allgemeinen Satze entspringen, dass, wenn I und I' zwei Integrale 1. Gattung sind, das über die ganze Berandung von T' erstreckte Integral $\int I\, d\, I'$ gleich null ist. Um in die Fülle der so erhaltenen Gleichungen Übersichtlichkeit zu bringen, bilden wir aus den Integralen gleicher Art lineare Verbindungen mit besonders einfachen Periodizitätsmoduln. Von diesen »halbnormierten Integralen« gehen wir dann zu den definitiv normierten über.*

Die Untersuchung geht aus von dem bekannten Satze, dass die Determinante aus den Periodizitätsmoduln von p linear unabhängigen Integralen 1. Gattung an den a-Schnitten nicht null ist. Es ist also:

$$(1)\qquad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{11} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{12} & -(\varrho+\varrho^4)A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{21} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{22} & -(\varrho+\varrho^4)A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{31} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{32} & -(\varrho+\varrho^4)A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & -(\varrho+\varrho^4)A_{41} & -(\varrho+\varrho^4)A_{42} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & -(\varrho+\varrho^4)A_{51} & -(\varrho+\varrho^4)A_{52} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & -(\varrho+\varrho^4)A_{61} & -(\varrho+\varrho^4)A_{62} & -(\varrho^2+\varrho^3)A_{63} \end{vmatrix} \neq 0$$

Wir multiplizieren die 1. bezw. 2. Spalte mit $(\varrho + \varrho^4)$ und addieren sie bezw. zur 4. und 5. Spalte, die 3. Spalte multiplizieren wir mit $(\varrho^2 + \varrho^3)$ und addieren sie zur letzten Spalte. Dann ergibt sich:

$$(2)\ D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{11} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{12} & -(1+2\varrho+2\varrho^4)A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{21} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{22} & -(1+2\varrho+2\varrho^4)A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{31} & (1+2\varrho+2\varrho^4)A_{32} & -(1+2\varrho+2\varrho^4)A_{33} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

oder

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} \end{vmatrix} \cdot (1+2\varrho+2\varrho^4)^3 \neq 0.$$

Folglich ist:

$$(4\text{a}) \quad D' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{und } 4\text{b}) \quad D'' = \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} & A_{43} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} \end{vmatrix} \neq 0.$$

13. Bildet man also aus W_1, W_2 und W_3 drei lineare Funktionen W_1^*, W_2^* und W_3^* mit der Vorschrift, dass an:

$$\text{III.} \quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline \overset{+}{W}{}_1^* - \overset{-}{W}{}_1^* & 1 & 0 & 0 \\ \overset{+}{W}{}_2^* - \overset{-}{W}{}_2^* & 0 & 1 & 0 \\ \overset{+}{W}{}_3^* - \overset{-}{W}{}_3^* & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

sei, so haben die daraus entspringenden Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} A_{41}\, W_1^* + A_{42}\, W_2^* + A_{43}\, W_3^* = W_1, \\ A_{51}\, W_1^* + A_{52}\, W_2^* + A_{53}\, W_3^* = W_2, \\ A_{61}\, W_1^* + A_{62}\, W_2^* + A_{63}\, W_3^* = W_3, \end{cases}$$

nach Gl. (4b) eine nicht verschwindende Auflösungsdeterminante D'', und es ist daher:

$$
(6)\quad \begin{cases} W_1^* = \dfrac{D''_{41}\, W_1 + D''_{51}\, W_2 + D''_{61}\, W_3}{D''}, \\[2ex] W_2^* = \dfrac{D''_{42}\, W_1 + D''_{52}\, W_2 + D''_{62}\, W_3}{D''}, \\[2ex] W_3^* = \dfrac{D''_{43}\, W_1 + D''_{53}\, W_2 + D''_{63}\, W_3}{D''}, \end{cases}
$$

wo D''_{hk} die zu A_{hk} gehörende Unterdeterminante von D'' bedeutet.

Diese Ausdrücke W_1^*, W_2^* *und* W_3^* *bilden die »Normalintegrale 3. Art«.*

Um in ähnlicher Weise die Integrale der beiden anderen Arten zu normieren, bedenken wir, dass wegen $D' \neq 0$ (Gl. 4a) mindestens ein Element $A_{1\alpha}$ der ersten Zeile von D' mitsamt seiner Adjunkte $D'_{1\alpha}$ von null verschieden sein muss ($\alpha = 1, 2, 3$); dabei bedeutet $A_{1\alpha}$ den Periodizitätsmodul von U an a_α; ist nun $\alpha = 1$ oder $= 2$, so können wir die Querschnitte a_1, a_2, a_3 uns so umnumeriert denken, dass jener nicht verschwindende Periodizitätsmodul gerade den Index $\alpha = 3$ erhält. Wir dürfen daher unbeschadet der Allgemeinheit die Annahmen:

$$
(7)\qquad A_{13} \neq 0, \qquad D'_{13} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \neq 0
$$

machen.

Sind jetzt V_1^* und V_2^* zwei lineare Verbindungen von V_1 und V_2 mit den Periodizitätsmoduln:

IV.

	a_1	a_2
$\overset{+}{V}{}_1^* - \overset{-}{V}{}_1^*$	1	0
$\overset{+}{V}{}_2^* - \overset{-}{V}{}_2^*$	0	1

so ist:

$$
(8)\quad \begin{cases} A_{21}\, V_1^* + A_{22}\, V_2^* = V_1, \\ A_{31}\, V_1^* + A_{32}\, V_2^* = V_2, \end{cases}
$$

also mit Rücksicht auf (7):

$$
(9)\quad \begin{cases} V_1^* = \dfrac{A_{32}\, V_1 - A_{22}\, V_2}{D'_{13}}, \\[2ex] V_2^* = \dfrac{-A_{31}\, V_1 + A_{21}\, V_2}{D'_{13}}. \end{cases}
$$

Dies sind die »Normalintegrale 2. Art«; ihre Periodizitätsmoduln an a_3 setzen wir zur Abkürzung gleich ω_1 bezw. ω_2, dann ist:

$$
(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\text{an } a_3: \quad \overset{+}{V}{}^*_1 - \overset{-}{V}{}^*_1 = \frac{A_{32}\,A_{23} - A_{22}\,A_{33}}{D'_{13}} = \omega_1\,, \\ &\text{an } a_3: \quad \overset{+}{V}{}^*_2 - \overset{-}{V}{}^*_2 = \frac{- A_{31}\,A_{23} + A_{21}\,A_{33}}{D'_{13}} = \omega_2. \end{aligned}\right.
$$

Als Normalintegral 1. Art wählen wir die nach (7) zulässige Bildung:

$$
(11)\qquad \frac{U}{A_{13}} = U^*,
$$

und setzen (vorübergehend):

$$
(12)\qquad \frac{A_{11}}{A_{13}} = a_{11}\,,\quad \frac{A_{12}}{A_{13}} = a_{12}\,.
$$

Die Gl. (6), (9) und (11) ergeben also jetzt zusammen mit der Tabelle II. und den Gl. (10) und (12) folgendes Periodenschema:

V.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U}{}^* - \overset{-}{U}{}^*$	a_{11}	a_{12}	1	$-(\varrho^2+\varrho^3)\,a_{11}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)\,a_{12}$	$-(\varrho+\varrho^4)$
$\overset{+}{V}{}^*_1 - \overset{-}{V}{}^*_1$	1	0	ω_1	$-(\varrho^2+\varrho^3)$	0	$-(\varrho+\varrho^4)\,\omega_1$
$\overset{+}{V}{}^*_2 - \overset{-}{V}{}^*_2$	0	1	ω_2	0	$-(\varrho^2+\varrho^3)$	$-(\varrho+\varrho^4)\,\omega_2$
$\overset{+}{W}{}^*_1 - \overset{-}{W}{}^*_1$	1	0	0	$-(\varrho+\varrho^4)$	0	0
$\overset{+}{W}{}^*_2 - \overset{-}{W}{}^*_2$	0	1	0	0	$-(\varrho+\varrho^4)$	0
$\overset{+}{W}{}^*_3 - \overset{-}{W}{}^*_3$	0	0	1	0	0	$-(\varrho^2+\varrho^3)$
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{U}{}^* - \overset{-}{U}{}^*$	$-\varrho^2 a_{11}$	$-\varrho^2 a_{12}$	$-\varrho^4$	$-\varrho\,a_{11}$	$-\varrho\,a_{12}$	$-\varrho^2$
$\overset{+}{V}{}^*_1 - \overset{-}{V}{}^*_1$	$-\varrho^3$	0	$-\varrho\,\omega_1$	$-\varrho^4$	0	$-\varrho^3\,\omega_1$
$\overset{+}{V}{}^*_2 - \overset{-}{V}{}^*_2$	0	$-\varrho^3$	$-\varrho\,\omega_2$	0	$-\varrho^4$	$-\varrho^3\,\omega_2$
$\overset{+}{W}{}^*_1 - \overset{-}{W}{}^*_1$	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0	0
$\overset{+}{W}{}^*_2 - \overset{-}{W}{}^*_2$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\overset{+}{W}{}^*_3 - \overset{-}{W}{}^*_3$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

14. Auf diese »halbnormierte« Integrale 1. Gattung wenden wir jetzt den in Artikel 12. erwähnten Satz an, dass, wenn I und I' irgend zwei Integrale 1. Gattung sind, das Integral $\int I\,d\,I'$ über den ganzen Rand der kanonisch zerschnittenen Riemann'schen Fläche T' genommen verschwindet. Nun ist aber:

$$\int\limits_{T'} I\,d\,I' = \sum_{\mu} \begin{vmatrix} A_\mu & B_\mu \\ A'_\mu & B'_\mu \end{vmatrix},$$

wo A_μ bezw. A'_μ die Periodizitätsmoduln der Integrale I bezw. I' an dem Schnitte a_μ, und B_μ bezw. B'_μ die Periodizitätsmoduln der Integrale I bezw. I' an dem Schnitte b_μ bedeuten.

Wir haben also die Relation:

(13) $$\sum_{\mu} \begin{vmatrix} A_\mu & B_\mu \\ A'_\mu & B'_\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir 1) $I = U^*$, $I' = V^*_1$ und 2) $I = U^*$, $I' = V^*_2$, so ergibt sich:

(14) $$a_{11} = (\varrho + \varrho^4)\,\omega_1 \text{ und } a_{12} = (\varrho + \varrho^4)\,\omega_2.$$

Auf die übrigen Integrale angewandt ergibt Gl. (13) Identitäten.

Demnach nimmt das Periodenschema V endgültig die folgende Form an:

VI.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U^*} - \overline{U^*}$	$(\varrho+\varrho^4)\,\omega_1$	$(\varrho+\varrho^4)\,\omega_2$	1	ω_1	ω_2	$-(\varrho+\varrho^4)$
$\overset{+}{V^*_1} - \overline{V^*_1}$	1	0	ω_1	$-(\varrho^2+\varrho^3)$	0	$-(\varrho+\varrho^4)\,\omega_1$
$\overset{+}{V^*_2} - \overline{V^*_2}$	0	1	ω_2	0	$-(\varrho^2+\varrho^3)$	$-(\varrho+\varrho^4)\,\omega_2$
$\overset{+}{W^*_1} - \overline{W^*_1}$	1	0	0	$-(\varrho+\varrho^4)$	0	0
$\overset{+}{W^*_2} - \overline{W^*_2}$	0	1	0	0	$-(\varrho+\varrho^4)$	0
$\overset{+}{W^*_3} - \overline{W^*_3}$	0	0	1	0	0	$-(\varrho^2+\varrho^3)$
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{U^*} - \overline{U^*}$	$-(\varrho+\varrho^3)\,\omega_1$	$-(\varrho+\varrho^3)\,\omega_2$	$-\varrho^4$	$-(1+\varrho^2)\,\omega_1$	$-(1+\varrho^2)\,\omega_2$	$-\varrho^2$
$\overset{+}{V^*_1} - \overline{V^*_1}$	$-\varrho^3$	0	$-\varrho\,\omega_1$	$-\varrho^4$	0	$-\varrho^3\,\omega_1$
$\overset{+}{V^*_2} - \overline{V^*_2}$	0	$-\varrho^3$	$-\varrho\,\omega_2$	0	$-\varrho^4$	$-\varrho^3\,\omega_2$
$\overset{+}{W^*_1} - \overline{W^*_1}$	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0	0
$\overset{+}{W^*_2} - \overline{W^*_2}$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\overset{+}{W^*_3} - \overline{W^*_3}$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

In dieser Tabelle sehen wir die anfänglich 72 Periodizitätsmoduln der sechs Integrale 1. Gattung auf zwei absolute Moduln ω_1 und ω_2 zurückgeführt, die, falls zwischen den Verzweigungspunkten keine besonderen Relationen bestehen, voneinander unabhängig sind.

15. Auch von den halbnormierten Integralen ist die Determinante der Periodizitätsmoduln an den a-Schnitten nicht null; also:

$$\begin{vmatrix} (\varrho+\varrho^4)\omega_1 & (\varrho+\varrho^4)\omega_2 & 1 & \omega_1 & \omega_2 & -(\varrho+\varrho^4) \\ 1 & 0 & \omega_1 & -(\varrho^2+\varrho^3) & 0 & -(\varrho+\varrho^4)\omega_1 \\ 0 & 1 & \omega_2 & 0 & -(\varrho^2+\varrho^3) & -(\varrho+\varrho^4)\omega_2 \\ 1 & 0 & 0 & -(\varrho+\varrho^4) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -(\varrho+\varrho^4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(\varrho^2+\varrho^3) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Wir multiplizieren die 1., bezw. 2. Spalte mit $(\varrho^2+\varrho^3)$ und addieren sie zur 4. bezw. 5. Spalte; die 3. Spalte multiplizieren wir mit $(\varrho+\varrho^4)$ und addieren sie zur letzten Spalte. Dann ist:

$$\begin{vmatrix} (\varrho+\varrho^4)\omega_1 & (\varrho+\varrho^4)\omega_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1+2\varrho^2+2\varrho^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+2\varrho^2+2\varrho^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(1+2\varrho^2+2\varrho^3) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

woraus jetzt folgt, dass die Unterdeterminante:

$$(15) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} (\varrho+\varrho^4)\omega_1 & (\varrho+\varrho^4)\omega_2 & 1 \\ 1 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 1 & \omega_2 \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist; also ist:

$$(16) \qquad \Omega = 1 - (\varrho+\varrho^4)(\omega_1^2+\omega_2^2) \neq 0 .$$

Auf diese Ungleichheit gestützt, lassen sich jetzt die definitiven Normalintegrale 1. Gattung leicht konstruieren. Wir bilden zunächst aus U^*, V_1^* und V_2^* drei lineare Funktionen T_1, T_2 und T_3 mit den Periodizitätsmoduln:

VII.

an:	a_1	a_2	a_3
$\overset{+}{T}_1 - \overset{-}{T}_1$	1	0	0
$\overset{+}{T}_2 - \overset{-}{T}_2$	0	1	0
$\overset{+}{T}_3 - \overset{-}{T}_3$	0	0	1

Dann ist:

$$
(17)\quad \begin{cases} (\varrho + \varrho^4)\omega_1 T_1 + (\varrho + \varrho^4)\omega_2 T_2 + \quad T_3 = U^*, \\ T_1 \qquad\qquad + \omega_1 T_3 = V_1^*, \\ \qquad\qquad T_2 + \omega_2 T_3 = V_2^*; \end{cases}
$$

mithin:

$$
(18)\quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{-\omega_1 U^* + (1 - (\varrho + \varrho^4)\omega_2^2)\, V_1^* + (\varrho + \varrho^4)\omega_1\omega_2\, V_2^*}{\Omega} \\[2ex] T_2 = \dfrac{-\omega_2 U^* + (\varrho + \varrho^4)\omega_1\omega_2\, V_1^* + (1 - (\varrho + \varrho^4)\omega_1^2)\, V_2^*}{\Omega} \\[2ex] T_3 = \dfrac{U^* - (\varrho + \varrho^4)\omega_1 V_1^* - (\varrho + \varrho^4)\omega_2 V_2^*}{\Omega}\,. \end{cases}
$$

Demnach ergibt sich jetzt folgendes Periodenschema:

VIII.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{T}_1 - \overset{-}{T}_1$	1	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	0	0
$\overset{+}{T}_2 - \overset{-}{T}_2$	0	1	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$	0
$\overset{+}{T}_3 - \overset{-}{T}_3$	0	0	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$
$\overset{+}{W}{}_1^* - \overset{-}{W}{}_1^*$	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0	0
$\overset{+}{W}{}_2^* - \overset{-}{W}{}_2^*$	0	1	0	0	$-(\varrho + \varrho^4)$	0
$\overset{+}{W}{}_3^* - W_3^*$	0	0	1	0	0	$-(\varrho^2 + \varrho^3)$

an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{T}_1 - \overset{-}{T}_1$	$(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_1^2}{\Omega} - \varrho^3$	$(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-(\varrho-\varrho^4)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_1^2}{\Omega} - \varrho^4$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_1}{\Omega}$
$\overset{+}{T}_2 - \overset{-}{T}_2$	$(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \varrho^3$	$-(\varrho-\varrho^4)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \varrho^4$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_2}{\Omega}$
$\overset{+}{T}_3 - \overset{-}{T}_3$	$-(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-(1+2\varrho+2\varrho^3)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho-\varrho^4)\frac{1}{\Omega} - \varrho$	$-(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-(\varrho^2-\varrho^3)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$(\varrho^2-\varrho^3)\frac{1}{\Omega} - \varrho^3$
$\overset{+}{W}{}_1^* - \overset{-}{W}{}_1^*$	ϱ^4	0	0	ϱ^2	0	0
$\overset{+}{W}{}_2^* - \overset{-}{W}{}_2^*$	0	$-\varrho^4$	0	0	$-\varrho^2$	0
$\overset{+}{W}{}_3^* - \overset{-}{W}{}_3^*$	0	0	$-\varrho^3$	0	0	$-\varrho^4$

16. Aus diesen sechs Integralen erhalten wir die Normalintegrale 1. Gattung, wenn wir aus T_1 und W_1^*, T_2 und W_2^*, bezw. T_3 und W_3^* je zwei lineare Funktionen u_1 und u_4, u_2 und u_5, bezw. u_3 und u_6 bilden, denen wir die Periodizitätsmoduln vorschreiben:

$$\text{IX.} \qquad \text{an } a_\nu\colon\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \delta_{\mu\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

wo $\delta_{\mu\nu}$ das KRONECKER'sche Symbol ist, das für $\mu = \nu$ den Wert 1, für $\mu \gtrless \nu$ den Wert null hat.[1] Dann ist:

$$(19) \qquad \begin{cases} u_1 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_4 = T_1, & u_1 - (\varrho + \varrho^4)\,u_4 = W_1^*, \\ u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_5 = T_2, & u_2 - (\varrho + \varrho^4)\,u_5 = W_2^*; \\ u_3 - (\varrho + \varrho^4)\,u_6 = T_3, & u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_6 = W_3^*: \end{cases}$$

und die definitiven Normalintegrale sind endlich:

$$(20) \qquad \begin{cases} u_1 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_1 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_1^*, \\ u_2 = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_2^*, \\ u_3 = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) T_3 + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right) W_3^*, \end{cases}$$

[1] Die RIEMANN'schen Normalintegrale 1. Gattung sind also $\pi i u_\mu$.

(20)
$$\left\{\begin{aligned} u_4 &= -\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_1 - W_1^*), \\ u_5 &= -\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_2 - W_2^*). \\ u_6 &= \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}(\varrho^2 + \varrho^3)\right)(T_3 - W_3^*). \end{aligned}\right.$$

Setzen wir symbolisch

(21)
$$a\varrho + b\varrho^2 + c\varrho^3 + d\varrho^4 = (a\,b\,c\,d)$$

und allgemein:

(22)
$$-x = x,$$

so gehört zu den Normalintegralen (20) das auf Seite 27 folgende Periodenschema X.

Bezeichnet man:

$$\text{an } b_\nu:\ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\mu\nu},$$

so ist die bekannte Relation

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$$

in Tabelle X identisch erfüllt.

§ 5. Die Thetafunktion.

17. Die zu unseren Normalintegralen gehörende Thetafunktion lautet:

$$\vartheta(u_1 \mid u_2 \mid u_3 \mid u_4 \mid u_5 \mid u_6) = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}^{-\infty, +\infty} e^{\pi i f_6 + 2\pi i(m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6)}$$

worin f_6 die quadratische Form der sechs Summationsbuchstaben bedeutet, deren Koeffizienten die Periodizitätsmoduln der Normalintegrale an den b-Schnitten sind. (Tabelle X.) Also:

(1)
$$f_6 = \sum_{\mu=1}^{6} \sum_{\mu'=1}^{6} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$$

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{u}_1 - \overset{-}{u}_1$	I	0	0	0	0	0
$\overset{+}{u}_2 - \overset{-}{u}_2$	0	I	0	0	0	0
$\overset{+}{u}_3 - \overset{-}{u}_3$	0	0	I	0	0	0
$\overset{+}{u}_4 - \overset{-}{u}_4$	0	0	0	I	0	0
$\overset{+}{u}_5 - \overset{-}{u}_5$	0	0	0	0	I	0
$\overset{+}{u}_6 - \overset{-}{u}_6$	0	0	0	0	0	I
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{u}_1 - \overset{-}{u}_1$	$\frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1^2}{\Omega} + \frac{1}{5}(122\bar{1})$	$\frac{1}{5}(3433)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1^2}{\Omega} - \frac{1}{5}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}$
$\overset{+}{u}_2 - \overset{-}{u}_2$	$\frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(3443)\frac{\omega_2^2}{\Omega} + \frac{1}{5}(1221)$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \frac{1}{5}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}$
$\overset{+}{u}_3 - \overset{-}{u}_3$	$-\frac{1}{5}(\bar{2}11\bar{2})\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(3113)\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(2112)$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(12\bar{2}1)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(1234)$
$\overset{+}{u}_4 - \overset{-}{u}_4$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_1^2}{\Omega}\ \frac{1}{5}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1^2}{\Omega} + \frac{1}{5}(4321)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1}{\Omega}$
$\overset{+}{u}_5 - \overset{-}{u}_5$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_2^2}{\Omega} - \frac{1}{5}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_2^2}{\Omega} + \frac{1}{5}(4321)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_2}{\Omega}$
$\overset{+}{u}_6 - \overset{-}{u}_6$	$\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{1}{\Omega}\ \frac{1}{5}(1234)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_1}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega_2}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{5}(2413)$

$$
\begin{aligned}
=\Big\{ &\ \frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}\omega_1-\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1}{\Omega}m_3-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_1\Big\}m_1\\
+\Big\{ &\ \frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}\omega_2-\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_2}{\Omega}m_3-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_2\Big\}m_2\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}+\frac{1}{5}(31\bar{1}\bar{3})\frac{1}{\Omega}m_3-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\Big\}m_3\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}\omega_1-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{\omega_1}{\Omega}m_3+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_1\Big\}m_4\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}\omega_2-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{\omega_2}{\Omega}m_3+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_2\Big\}m_5\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2}{\Omega}-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{1}{\Omega}m_3+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\Big\}m_6\\
&+\frac{1}{5}\Big\{(12\bar{2}\bar{1})m_1^2-2(2413)m_1m_4+(4321)m_4^2\Big\}\\
&+\frac{1}{5}\Big\{(12\bar{2}\bar{1})m_2^2-2(2413)m_2m_5+(4321)m_5^2\Big\}\\
&-\frac{1}{5}\Big\{(2\bar{1}1\bar{2})m_3^2+2(1234)m_3m_6-(2413)m_6^2\Big\}.
\end{aligned}
$$

Beachtet man, dass

$$
\begin{aligned}
&(3\bar{4}4\bar{3})\cdot(0110)=(1\bar{3}3\bar{1}),\\
&(3\bar{4}4\bar{3})\cdot(0110)^2=(2\bar{1}1\bar{2}),\\
(2)\qquad &(2\bar{1}1\bar{2})\cdot(0110)^2=(3\bar{4}4\bar{3})\cdot(0110)^4=(31\bar{1}\bar{3}),\\
&(1\bar{3}3\bar{1})\cdot(0110)^2=-(12\bar{2}\bar{1})
\end{aligned}
$$

ist, so ergibt sich:

$$
(3)\qquad f_6=
$$

$$
\begin{aligned}
\Big\{ &\ \frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}\omega_1-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_1\Big\}m_1\\
+\Big\{ &\ \frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}\omega_2-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_2\Big\}m_2\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}(0110)^2+\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}(0110)^2\Big\}m_3\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}\omega_1+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_1\Big\}m_4\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}\omega_2+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\omega_2\Big\}m_5\\
+\Big\{ &-\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3}{\Omega}+\frac{1}{5}(2\bar{1}1\bar{2})\frac{\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6}{\Omega}\Big\}m_6
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{5}\left\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_1^2-2\,(2413)\,m_1 m_4+(4321)\,m_4^2\right\}$$
$$+\frac{1}{5}\left\{(1221)\,m_2^2-2\,(2413)\,m_2 m_5+(4321)\,m_5^2\right\}$$
$$-\frac{1}{5}\left\{(2\bar{1}12)\,m_3^2+2\,(1234)\,m_3 m_6-(2413)\,m_6^2\right\}$$

$$=\frac{(3443)}{5\,\Omega}(\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3)^2-\frac{(3443)}{5\,\Omega}\,2\,(\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3)\cdot$$
$$\cdot(0110)(\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6)+\frac{(3443)}{5\,\Omega}(0110)^2(\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6)^2$$
$$+\frac{1}{5}\left\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_1^2-2\,(2413)\,m_1 m_4+(4321)\,m_4^2\right\}$$
$$+\frac{1}{5}\left\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_2^2-2\,(2413)\,m_2 m_5+(4321)\,m_5^2\right\}$$
$$-\frac{1}{5}\left\{(2\bar{1}12)\,m_3^2+2\,(1234)\,m_3 m_6-(2413)\,m_6^2\right\}.$$

Demnach ist die quadratische Form im Exponenten des allgemeinen Gliedes der Thetafunktion:

(4) $f_6 =$

$$\frac{(3443)}{5\,\Omega}\left\{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3-(0110)(\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6)\right\}^2$$
$$+\frac{1}{5}\left\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_1^2-2\,(2413)\,m_1 m_4+(4321)\,m_4^2\right\}$$
$$+\frac{1}{5}\left\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_2^2-2\,(2413)\,m_2 m_5+(4321)\,m_5^2\right\}$$
$$-\frac{1}{5}\left\{(2\bar{1}1\bar{2})\,m_3^2+2\,(1234)\,m_3 m_6-(2413)\,m_6^2\right\}.$$

wo

$$\Omega = 1-(\varrho+\varrho^4)(\omega_1^2+\omega_2^2)\neq 0$$

ist. *Die Thetafunktion ist daher im höchsten Grade spezialisiert; sie hängt nur von zwei Moduln ab.*

Zweiter Teil.

Algebraische Reduktion der Integrale I. Gattung im Falle $I_{18} = 0$.

§ 6. Einführung des Spezialfalles $I_{18} = 0$.

18. Die Thetafunktion unseres algebraischen Gebildes hat eine so spezielle Gestalt, dass sie ohne Zweifel durch geschickte Umformungen in einfachere Gebilde übergeführt oder wenigstens durch einfachere Gebilde ersetzt werden kann. Jedoch fehlt uns zur Zeit jeder Weg zu diesem Ziele. Dagegen ist es leicht, in dem Spezialfalle zu einem einfachen Resultate zu gelangen, *der durch das Verschwinden der Invariante 18ten Grades der Funktion $f(z)$ [Gl. (1) § 2] charakterisiert ist.*[1] *Nach* Clebsch[2] *bilden in diesem Falle vier der Nullpunkte von f eine Involution, von der der fünfte Nullpunkt von f ein Ordnungspunkt ist;* oder anders ausgedrückt: *jene vier Punkte bilden zwei Paare, α_1, α_3 und α_2, α_4, während andererseits zu dem fünften Punkte α_5 eindeutig ein sechster Punkt β existiert, so dass sowohl α_1 und α_3 als auch α_2 und α_4 durch α_5 und β harmonisch getrennt werden.*

Macht man über die Koeffizienten von f keinerlei Annahmen, so werden die fünf Punkte α_i im allgemeinen komplex sein. Zwei einander harmonisch trennende Paare komplexer Punkte liegen immer so auf einem Kreise $\varkappa$ in der komplexen Zahlenebene, dass die Verbindungslinie der Punkte eines dieser Paare durch den Schnittpunkt der Tangenten des Kreises in den Punkten des andern Paares geht, und zwar ist diese Beziehung wechselseitig.

Im allgemeinen liegen also die Punkte

1. α_1 und α_3 sowie α_5 und β auf einem Kreise $\varkappa$ und die Gerade $\alpha_1\,\alpha_3$ geht durch den Schnittpunkt S der Tangenten von $\varkappa$ in α_5 und β,

2. α_2 und α_4 sowie α_5 und β auf einem Kreise λ und die Gerade $\alpha_2\,\alpha_4$ geht durch den Schnittpunkt T der Tangenten von λ in α_5 und β (vergl. Fig. 6).

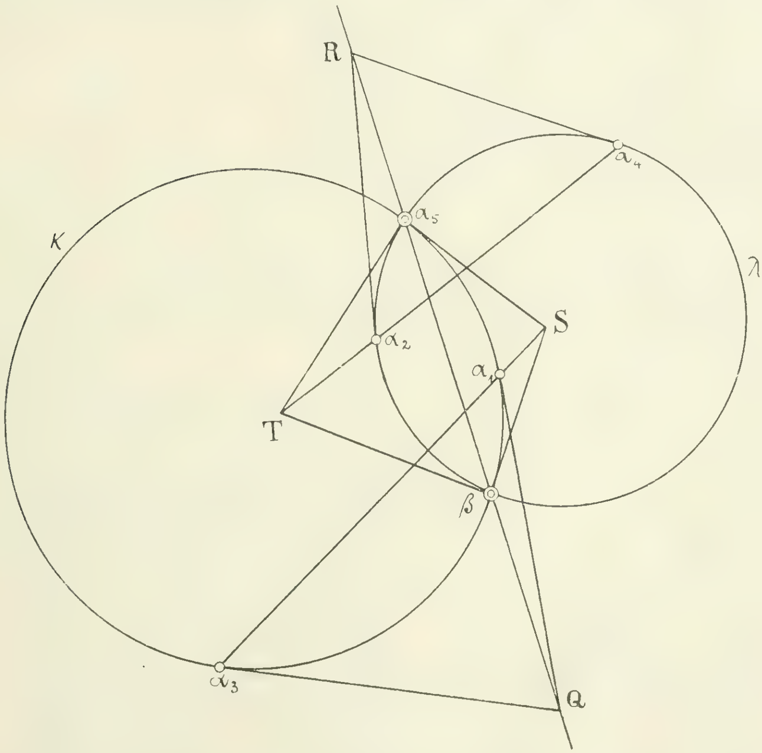
---

[1] Dabei darf keine Covariante von f verschwinden.

[2] A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, § 94.

Die Gerade $\alpha_5 \beta$ geht durch den Schnittpunkt Q der Tangenten von $\varkappa$ in α_1 und α_3 und durch den Schnittpunkt R der Tangenten von λ in α_2 und α_4. Die Kreise $\varkappa$ und λ können in gerade Linien degenerieren, was u. a. immer eintritt, wenn die Nullpunkte von f reell sind (siehe Fig. 7). In diesem Falle prägt sich

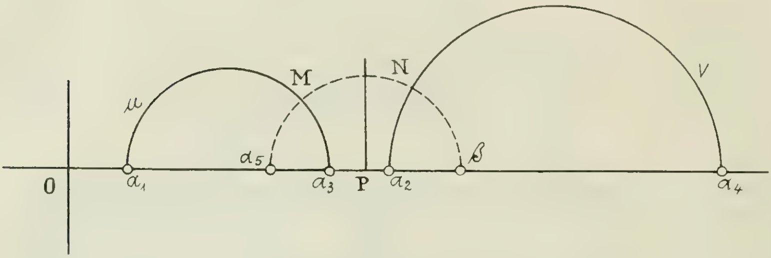
·FIGUR· 6·



die Lage der Punkte α_5 und β der Anschauung am klarsten ein, wenn man über $\alpha_1 \alpha_3$ und $\alpha_2 \alpha_4$ je einen Halbkreis μ bezw. ν beschreibt; dann werden nämlich α_5 und β die Nullkreise des durch μ und ν bestimmten hyperbolischen Kreis-

büschels; um α_5 und β zu finden, legt man vom Schnittpunkt P der Potenzlinie mit der Zentralen an μ und ν die Tangenten $PM = PN$ und konstruiert den Kreis um P mit dem Radius PM. Dieser Kreis geht dann durch α_5 und β.

·FIGUR·7·

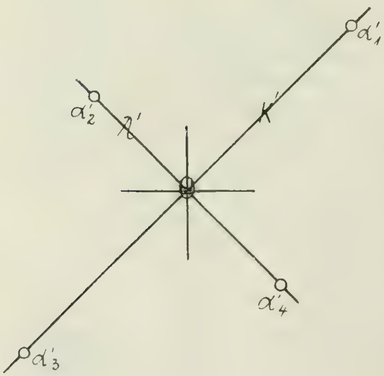


19. Wendet man auf die komplexe z-Ebene die Abbildung

$$\zeta = \frac{z - \alpha_5}{z - \beta} \tag{1}$$

an, so entsprechen den Punkten α_5 und β der z-Ebene die Punkte 0 und ∞ der ζ-Ebene.

·FIGUR·8·



Da sich die Substitution (1), wie jede Substitution 1. Ordnung, durch Parallelverschiebung, Ähnlichkeit und Inversion erreichen lässt, so gehen durch die Abbildung (1) alle Kreise der z-Ebene — einschliesslich der Geraden als extremer Fälle — wieder in Kreise über. Speziell entsprechen den Kreisen $\varkappa$ und λ der z-Ebene zwei Kreise $\varkappa'$ und λ' der ζ-Ebene, die durch die Punkte 0 und ∞ gehen, d. h. zwei gerade Linien durch den Nullpunkt der ζ-Ebene; jede dieser Geraden geht noch durch den unendlich fernen Punkt der Zahlenebene.

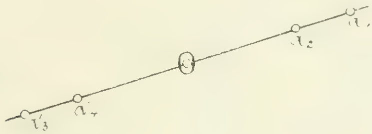
Die Bildpunkte α'_1, α'_3 von α_1 und α_3 liegen daher auf z' äquidistant vom Nullpunkt O, ebenso die Bildpunkte α'_2 und α'_4 auf λ'. (Vergl. Fig. 8.)

Durch die Substitution

$$[illegible]$$

geht also das System der Nullpunkte von f über in die Eckpunkte und den Mittelpunkt eines Parallelogramms, das auch in eine Gerade ausarten kann (s. Fig. 9),

·FIGVR·9·



wobei aber immer α'_1 und α'_3 sowie α'_2 und α'_4 je von O gleichen Abstand haben. (Dies gilt z. B. auch, wenn die Punkte α und folglich auch die Punkte α' reell sind.)

Da also stets

$$(2)\qquad \alpha'_1 = -\alpha'_3;\quad \alpha'_2 = -\alpha'_4;\quad \alpha'_5 = 0$$

ist, so tritt an Stelle von $f(z)$ eine Funktion

$$(3)\qquad \varphi(\zeta) = \zeta(\zeta - \alpha'_1)(\zeta + \alpha'_1)(\zeta - \alpha'_2)(\zeta + \alpha'_2),$$

also von der Form:

$$(4)\qquad \varphi(\zeta) = \zeta(a_0\zeta^4 + 2a_1\zeta^2 + a_2).$$

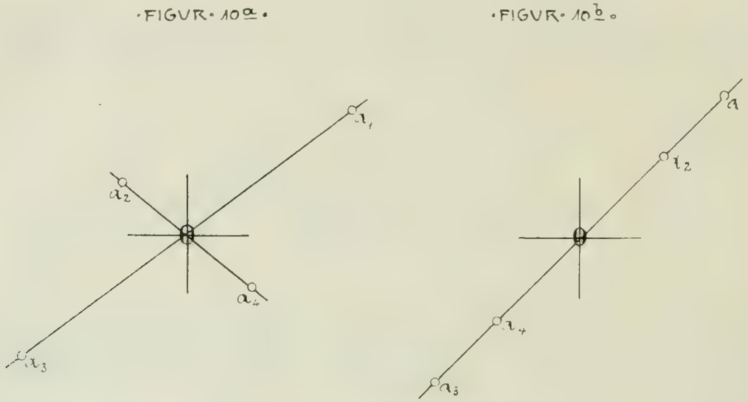
Durch die Substitution (1) *tritt jetzt an die Stelle der Irrationalität* $s = \sqrt[3]{f(z)}$ *die andere* $\sigma = \sqrt[3]{\varphi(\zeta)}$, die wir der weiteren Untersuchung zu Grunde legen wollen, indem wir jedoch wieder zu den alten Bezeichnungen zurückkehren. Mit anderen Worten:

Wir nehmen jetzt an, vier Nullpunkte von $f(z)$ hätten von vornherein die Eckpunkte eines Parallelogramms gebildet, — den Grenzfall der Fig. 9 eingeschlossen —, dessen Mittelpunkt zugleich Nullpunkt der z-Ebene und fünfter Nullpunkt von $f(z)$ ist.

Dann hat $f(z)$ die Form:

(5) $$f(z) = z(a_0 z^4 + 2 a_1 z^2 + a_2) = s^5,$$

und die Nullpunkte haben die in Fig. 10a. bezw. 10b. (Grenzfall) angegebene



Lage. Die Invariante 18ten Grades ist identisch null.

§ 7. Nachweis zweier Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p = 2$.

20. Die folgenden Betrachtungen lassen sich am bequemsten durch homogene Variabeln darstellen. Wir setzen daher

(1) $$z = \frac{z_1}{z_2} \text{ also: } dz = -\frac{z_1 d z_2 - z_2 d z_1}{z_2^2} = -\frac{(z\,dz)}{z_2^2},$$

und

(2) $$f(z) = \frac{f(z_1, z_2)}{z_2^5}, \quad s = \frac{s(z_1, z_2)}{z_2},$$

wo nach Gl. (5) § 6

(3) $$s(z_1, z_2)^5 = f(z_1, z_2) = z_1 (a_0 z_1^4 + 2 a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)$$

ist. Unsere Fundamentalintegrale 1. Gattung (Gl. (5) § 2), denen also jetzt Gl. (5) § 6 zu Grunde liegt, werden durch die Substitution (1) übergeführt in:

$$
(4)\quad \begin{cases}
U = \int \frac{dz}{s^2} = -\int \frac{(zdz)}{s(z_1, z_2)^2}; \\
V_1 = \int \frac{zdz}{s^3} = -\int \frac{z_1(zdz)}{s(z_1, z_2)^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3} = -\int \frac{z_2(zdz)}{s(z_1, z_2)^3}; \\
W_1 = \int \frac{z^2dz}{s^4} = -\int \frac{z_1^2(zdz)}{s(z_1, z_2)^4}, \quad W_2 = \int \frac{zdz}{s^4} = -\int \frac{z_1 z_2 (zdz)}{s(z_1, z_2)^4}, \quad W_3 = \int \frac{dz}{s^4} = -\int \frac{z_2^2(zdz)}{s(z_1, z_2)^4}.
\end{cases}
$$

Vermöge der Substitution

$$
(5)\qquad z_1 = \sqrt{z'_1}, \quad z_2 = \sqrt{z'_2}, \quad \left(z' = \frac{z'_1}{z'_2}\right)
$$

wird:

$$
dz_1 = \frac{1}{2}\frac{dz'_1}{\sqrt{z'_1}}, \quad dz_2 = \frac{1}{2}\frac{dz'_2}{\sqrt{z'_2}};
$$

also:

$$
(6)\qquad (zdz) = \frac{1}{2}\frac{(z'dz')}{\sqrt{z'_1 z'_2}},
$$

und es geht W_2 über in:

$$
(7)\qquad W_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{(z'dz')}{t(z'_1, z'_2)},
$$

wo:

$$
(8)\qquad t(z'_1, z'_2)^5 = z'^2_1 (a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)^4
$$

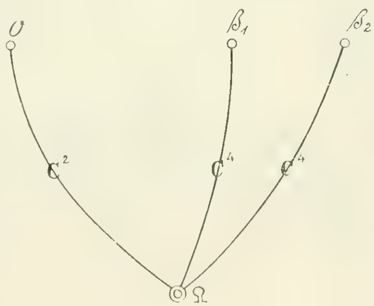
ist.

Es steht also im Nenner des Integranden von W_2 wiederum eine fünfte Wurzel und zwar aus einer binären Form *10. Grades,* die aber nur drei voneinander verschiedene Nullpunkte besitzt. Der 1. Nullpunkt ist der Punkt $z' = 0$, die beiden anderen seien

$$
z' = \beta_1 \text{ und } z' = \beta_2.
$$

Die zu t gehörende Riemann'sche Fläche hat demnach fünf Blätter, aber nur drei Verzweigungspunkte, 0, β_1 und β_2, und drei Verzweigungslinien, die wir wieder von den Verzweigungspunkten nach einem beliebigen Punkte Ω konvergieren lassen,

·FIGUR·11·



der kein Verzweigungspunkt ist. Dem νten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) ordnen wir den Wert

$$r_\nu = \varrho^\nu [r]$$

zu, wo $[r]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte Wurzel $\sqrt[5]{z'^2_1 (a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)^4}$ bedeutet. Überschreitet man bei positiver Umkreisung des Punktes 0 die Verzweigungslinie $0\,\Omega$, so permutieren sich die fünf Zweige r_ν von r nach dem Zyklus C^2, überschreitet man dagegen in demselben Sinne die Verzweigungslinien $\beta_1 \Omega$ und $\beta_2 \Omega$, so permutieren sich die fünf Zweige r_ν von r nach dem Zyklus C^4, wo

$$C = (1, 2, 3, 4, 5)$$

ist. Das Geschlecht dieser Riemann'schen Fläche ist nach Formel (6) § 1

$$p = 2.$$

Demnach ist W_2 ein Abel'sches Integral 1. Gattung des durch die Gl. (8) erzeugten Körpers vom Geschlecht $p = 2$, und es muss daher zu dieser neuen Funktionenklasse noch ein von W_2 linear unabhängiges Abel'sches Integral 1. Gattung existieren.

21. Dieses Integral erhalten wir, wenn wir auch auf V_2 (Gl. (4)) die Substitution (5) anwenden. Dann wird

$$V_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{(z'dz')}{\sqrt[5]{z'^4_1 (a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)^3}}. \tag{9}$$

Es scheint also im Nenner eine neue binäre Form 10. Grades unter der 5. Wurzel aufzutreten, die aber auch nur drei voneinander verschiedene Nullpunkte besitzt. Nun folgt aber aus Gl. (8)

$$r(z_1, z_2)^2 = (a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)\sqrt[5]{z'^4_1 (a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)^3}. \tag{10}$$

Folglich ist:

$$V_2 = -\frac{1}{2}\int \frac{(a_0 z'^2_1 + 2a_1 z'_1 z'_2 + a_2 z'^2_2)(z'dz')}{r(z'_1, z'_2)^2}. \tag{11}$$

Die Integrale V_2 und W_2 gehören also derselben Funktionenklasse vom Geschlecht $p = 2$ an und sind linear unabhängig voneinander. Wir haben demnach zwei Integrale 1. Gattung des durch die Gl. (5) § 6 erzeugten Körpers vom Geschlecht 6 reduziert auf Integrale 1. Gattung des durch die Gl. (8) erzeugten Körpers vom Geschlecht 2.

§ 8. Reduktion der Integrale 1. Gattung vom Geschlecht $p=2$ auf hyperelliptische.

22. *Nach einem Satze der Funktionentheorie müssen sich Integrale vom Geschlecht 2 auf hyperelliptische Integrale dieses Geschlechts zurückführen lassen. Wir wollen dies jetzt mit unsern Integralen V_2 und W_2 tun.*

Als hyperelliptische Integrale 1. Gattung vom Geschlecht 2 kann man wählen:

(1) $$v=\int\frac{d\zeta}{Z}, \text{ und } w=\int\frac{\zeta\, d\zeta}{Z},$$

wo

(2) $$Z=\sqrt{\varphi(\zeta)},$$

und $\varphi(\zeta)$ eine ganze rationale Funktion 6. Grades von ζ ist. Sind V_2 und W_2 in v und w transformierbar, so darf man ansetzen:

(3) $$\frac{dW_2}{dV_2}=\zeta \text{ und } \frac{d\zeta}{dV_2}=Z,$$

denn nach Gl. (1) ist:

(4) $$\frac{dw}{dv}=\zeta \text{ und } \frac{d\zeta}{dv}=Z.$$

Nach Gl. (4) § 7 ist also:

(5) $$\zeta=\frac{z_1}{s(z_1, z_2)}.$$

Folglich ist:

(6) $$d\zeta=\frac{s(z_1, z_2)dz_1-z_1 ds(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^2}.$$

Nun ist nach dem Euler'schen Satz über homogene Funktionen:

(7) $$s(z_1, z_2)=\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1}z_1+\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2}z_2,$$

und es ist:

(8) $$ds(z_1, z_2)=\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2}dz_2.$$

Aus den Gl. (6), (7) und (8) ergibt sich:

$$d\zeta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} z_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_2 & z_1 \\ \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2 & dz_1 \end{vmatrix}}{s(z_1, z_2)^2},$$

oder:

$$d\zeta = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} z_2 & z_1 \\ \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_2 & dz_1 \end{vmatrix}}{s(z_1, z_2)^2}.$$

Also ist:

$$(9) \qquad d\zeta = -\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} \frac{(z\,dz)}{s(z_1, z_2)^2}.$$

Hierin müssen wir noch $\frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2}$ bestimmen. Aus Gl. (3) § 7 folgt:

$$(10) \qquad 5\, s(z_1, z_2)^4 \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

Wir setzen (vorübergehend):

$$(11) \qquad \frac{1}{5} \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2} = f_2(z_1, z_2).$$

Dann ist aus Gl. (10)

$$(12) \qquad \frac{\partial s(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{f_2(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^4}.$$

Diesen Wert in (9) eingesetzt, ergibt:

$$(13) \qquad d\zeta = -\frac{f_2(z_1, z_2)}{s(z_1, z_2)^6} \cdot (z\,dz).$$

Nun ist: (Gl. (4) § 7)

$$dV_2 = -\frac{z_2 (z\,dz)}{s(z_1, z_2)^3}.$$

Also nach Gl. (3)

$$(14) \qquad Z = \frac{f_2(z_1, z_2)}{z_2\, s(z_1, z_2)^3}.$$

Gl. (11) und Gl. (3) § 7 ergeben:

$$f_2(z_1, z_2) = \frac{4}{5} z_1 z_2 (a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2). \tag{15}$$

In Gl. (14) eingesetzt erhält man:

$$Z = \frac{4}{5} \frac{z_1 (a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2)}{s(z_1, z_2)^3}. \tag{16}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (5):

$$Z = \frac{4}{5} z \left(a_1 z^2 + a_2 \frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}\right). \tag{17}$$

Aus dieser Gl. ist noch $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ zu eliminieren. Nach $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ aufgelöst ergibt Gl. (17):

$$\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2} = \frac{5}{4} \frac{Z}{a_2 z} - \frac{a_1}{a_2} z^2. \tag{18}$$

Nach Gl. (3) § 7 ist nun:

$$1 = \frac{z_1 (a_0 z_1^4 + 2 a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)}{s(z_1, z_2)^5}. \tag{19}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (5)

$$1 = z \left(a_0 z^4 + 2 a_1 z^2 \frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2} + a_2 \frac{z_2^4}{s(z_1, z_2)^4}\right). \tag{20}$$

Setzen wir in diese Gl. den Wert von $\frac{z_2^2}{s(z_1, z_2)^2}$ aus Gl. (18) ein, so ergibt sich:

$$1 = z \left[\left(a_0 - \frac{a_1^2}{a_2}\right) z^4 + \frac{25}{16} \frac{Z^2}{a_2 z^2}\right]. \tag{21}$$

Aus dieser Gleichung folgt schliesslich:

$$Z = \frac{4}{5} \sqrt{z [a_2 + (a_1^2 - a_0 a_2) z^5]}. \tag{22}$$

Unsere Integrale V_2 und W_2 nehmen also die Gestalt:

$$V_2 = \int \frac{dz}{Z}, \quad W_2 = \int \frac{z\, dz}{Z} \tag{23}$$

an, wo Z durch Gl. (22) gegeben ist.

23. Die Umformung von f (Gl. (1) § 2) in die Gestalt $f(z_1, z_2) = z_1 (a_0 z_1^4 + 2 a_1 z_1^2 z_2^2 + a_2 z_2^4)$ lässt sich mittels der Methoden der Invariantentheorie,

insbesondere durch das Verfahren der typischen Darstellung [1] erreichen; auch die Überführung von V_2 und W_2 in hyperelliptische Integrale gelingt auf diese Weise, jedoch durch ausserordentlich komplizierte Formeln, auf deren Mitteilung wir verzichten wollen.

Wegen der Reduzierbarkeit von V_2 und W_2 müssen nach Sätzen von Picard und Poincaré [2] sich auch die übrigen vier Integrale 1. Gattung reduzieren lassen, und zwar auf Integrale vom Geschlecht $p = 4$. Die Lösung dieses Problems mit den im Krazer'schen Buch über die Thetafunktionen [3] angegebenen transcendenten Hilfsmitteln ist z. Z. praktisch nicht ausführbar. Eine rein algebraische Lösung wollte ebenfalls nicht glücken. Wir müssen uns daher vorbehalten, auf diese Aufgabe später einmal zurückzukommen.

[1] A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, 7.—9. Abschnitt.

[2] A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903, S. 499 Satz XII.

[3] l. c. Kapitel XI.

Dritter Teil.

Reduktion der Thetafunktion im Falle $I_{18} = 0$.

§ 9. Die Riemann'sche Fläche im Falle $I_{18} = 0$.

24. Im Falle $I_{18} = 0$ darf, wie wir im § 6 gezeigt haben, unsere Grundgleichung (1) § 2 in der Form

$$s^5 = f(z) = z(a_0 z^4 + 2 a_1 z^2 + a_2) \tag{1}$$

angenommen werden. Die zu s gehörige RIEMANN'sche Fläche ist fünfblättrig und besitzt fünf Verzweigungspunkte. Dem νten Blatte ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) ordnen wir, wie im § 2, den Wert

$$s_\nu = \varrho^\nu [s] \tag{2}$$

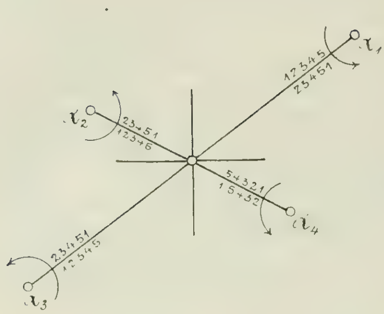
zu, wenn $[s]$ die durch Einführung von Polarkoordinaten eindeutig gemachte $\sqrt[5]{f(z)}$ und

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{5}} \tag{3}$$

ist. Die fünf Verzweigungspunkte entsprechen den fünf Nullpunkten von $f(z)$ und haben daher eine spezielle Lage (vgl. § 6). Nämlich der eine Verzweigungspunkt ist der Punkt $z = 0$, und von den übrigen vier liegen je zwei, α_1, α_3 und α_2, α_4, symmetrisch zu dem Punkt $z = 0$; α_1, α_2, α_3 und α_4 bilden die Eckpunkte eines Parallelogrammes, dessen Mittelpunkt der Punkt $z = 0$ ist (Fig. 12). Als Verzweigungslinien wählen wir die Diagonalen dieses Parallelogrammes, wobei dann zu beachten ist, dass die Blätter der RIEMANN'schen Fläche nicht längs einer ganzen Diagonale in gleicher Weise zusammenhängen. Es permutieren sich vielmehr, wenn man bei positiver Umkreisung eines Verzweigungspunktes die zwischen diesem Punkte und dem Punkte $z = 0$ liegende Hälfte der Diagonale überschreitet, die fünf Zweige s_ν von s nach dem Zyklus

$$C = (1, 2, 3, 4, 5).$$

·FIGUR· 12·

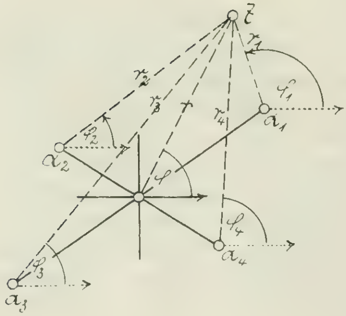


Infolgedessen hängt, wenn man die beiden Hälften einer Diagonale in derselben Richtung, z. B. in der Richtung, in der man schreibt, überschreitet, das νte Blatt längs der einen Hälfte der Diagonale mit dem zyklisch folgenden, längs der andern Hälfte aber mit dem zyklisch vorhergehenden zusammen. Im Punkte $z = 0$ hängen die fünf Blätter in komplizierter Weise zusammen, jedenfalls aber gelangt man, wie man sich leicht an Fig. 12 überzeugen kann, nach fünf positiven Umkreisungen des Punktes $z = 0$ wieder in das Blatt, von dem man ausging.

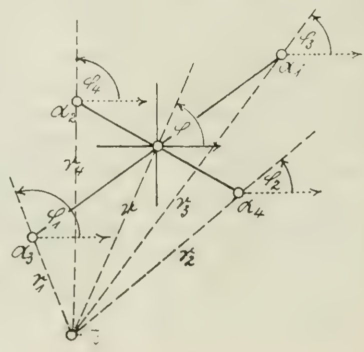
25. Wir betrachten nun die Werte s bezw. $\bar{s}$ von s in zwei in bezug auf den Punkt $z = 0$ symmetrischen Punkten z bezw. $\bar{z}$. Es sei:

$$
\begin{aligned}
z0 &= r, \\
z\alpha_\lambda &= r_\lambda. \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

·FIGUR· 13a·



·FIGUR· 13b·



Die Winkel zwischen der positiven Richtung der Hauptachse und den Geraden r bezw. r_λ bezeichnen wir mit φ bezw. φ_λ.

Dann ist (vergl. Fig. 13a und 13b):

$$s = (r\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4)^{\frac{1}{5}} e^{i \frac{\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{5}}$$

$$\bar{s} = (r\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4)^{\frac{1}{5}} e^{i \frac{(\varphi + \pi) + (\varphi_1 + \pi) + (\varphi_2 + \pi) + (\varphi_3 + \pi) + (\varphi_4 + \pi)}{5}}$$

$$= s\, e^{\pi i} = -s.$$

Es ist also

(5) $$\bar{s} = -s.$$

Die Werte von s in zwei in bezug auf den Punkt $z = 0$ symmetrischen Punkten unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen.

Im vorliegenden Falle besitzt also die Riemann'sche *Fläche ausser der früher benutzten Transformation in sich [vergl. Gl. (7) § 1]:*

(I) $$z' = z, \quad s' = \varrho s$$

noch eine zweite:

(II) $$\bar{z} = -z, \quad \bar{s} = -s,$$

die jedem ihrer Punkte P in demselben Blatte den bezüglich $z = 0$ zentrisch symmetrischen Punkt $\bar{P}$ zuordnet.

Wie wir nun früher bei der Anlage des Querschnittsystems die besondere Natur der Abbildung I ausgenutzt haben, indem wir drei Schnitte eines jeden Teilsystems zueinander kongruent annahmen, (vergl. Artikel 8 und Fig. 5, Anhang) wollen wir jetzt ausserdem noch nach Möglichkeit dafür sorgen, dass durch die Abbildung II das ganze Querschnittsystem in sich selbst übergeht. Dieser Gedanke lässt sich wenigstens so weit verwirklichen, dass

die Schnitte des Teilsystems S_1, nämlich a_1, b_1, a_4, b_4

zu den Schnitten des Teilsystems S_2, nämlich a_2, b_2, a_5, b_5

in bezug auf den Punkt $z = 0$ zentrisch symmetrisch liegen (vergl. Fig. 14, Anhang); ausserdem ist in Fig. 14 zu dem Schnitt b_3 des Teilsystems S_3 ein in bezug auf den Punkt $z = 0$ zentrisch symmetrischer Weg $\bar{b}_3$ gelegt, der zu weiteren Relationen zwischen den Periodizitätsmoduln Anlass gibt. Im übrigen ist Fig. 14 nach demselben Prinzip angelegt wie Fig. 5, nur sind die einzelnen Schnitte in Fig. 14 im Vergleich zu denen von Fig. 5 verzerrt, da in Fig. 14 die Verzweigungspunkte nicht in einer Geraden liegen (vergl. Artikel 8). *Es bleiben daher alle bisher gefundenen Modulrelationen auch in unserem Spezialfall richtig.*

§ 10. **Die speziellen Periodenrelationen im Falle $I_{18} = 0$.**

26. Die Abbildung

$$\bar{z} = -z, \quad \bar{s} = -s \tag{1}$$

unserer Riemann'schen Fläche auf sich selbst hat für die Integrale 1. Gattung

$$\left\{\begin{array}{l} U = \displaystyle\int \frac{dz}{s^2}; \\ V_1 = \displaystyle\int \frac{z\,dz}{s^3}, \quad V_2 = \int \frac{dz}{s^3}; \\ W_1 = \displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{s^4}, \quad W_2 = \int \frac{z\,dz}{s^4}, \quad W_3 = \int \frac{dz}{s^4} \end{array}\right. \tag{2}$$

die Folge:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{U} = -U; \\ \bar{V}_1 = -V_1, \quad \bar{V}_2 = +V_2; \\ \bar{W}_1 = -W_1, \quad \bar{W}_2 = +W_2, \quad \bar{W}_3 = -W_3, \end{array}\right. \tag{3}$$

wenn jedesmal auch der Integrationsweg mit transformiert wird. Infolgedessen ergeben sich für die Periodizitätsmoduln die Relationen:

$$\left\{\begin{array}{l} A_{12} = -A_{11}; \\ A_{22} = -A_{21}, \quad A_{32} = +A_{31}; \\ A_{42} = -A_{41}, \quad A_{52} = +A_{51}, \quad A_{62} = -A_{61}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Folglich erhalten wir aus der Tabelle II und den Gl. (4) folgendes Periodenschema:

XI.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U} - \bar{U}$	A_{11}	$-A_{11}$	A_{13}	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{11}$	$+(\varrho^2+\varrho^3)A_{11}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{13}$
$\overset{+}{V}_1 - \bar{V}_1$	A_{21}	$-A_{21}$	A_{23}	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{21}$	$+(\varrho^2+\varrho^3)A_{21}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{23}$
$\overset{+}{V}_2 - \bar{V}_2$	A_{31}	$+A_{31}$	A_{33}	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{31}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{31}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{33}$
$\overset{+}{W}_1 - \bar{W}_1$	A_{41}	$-A_{41}$	A_{43}	$-(\varrho+\varrho^4)A_{41}$	$+(\varrho+\varrho^4)A_{41}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{43}$
$\overset{+}{W}_2 - \bar{W}_2$	A_{51}	$+A_{51}$	A_{53}	$-(\varrho+\varrho^4)A_{51}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{51}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{53}$
$\overset{+}{W}_3 - \bar{W}_3$	A_{61}	$-A_{61}$	A_{63}	$-(\varrho+\varrho^4)A_{61}$	$+(\varrho+\varrho^4)A_{61}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{63}$

an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{U}-\overset{-}{U}$	$-\varrho^2 A_{11}$	$+\varrho^2 A_{11}$	$-\varrho^4 A_{13}$	$-\varrho A_{11}$	$+\varrho A_{11}$	$-\varrho^2 A_{13}$
$\overset{+}{V}_1-\overset{-}{V}_1$	$-\varrho^3 A_{21}$	$+\varrho^3 A_{21}$	$-\varrho A_{23}$	$-\varrho^4 A_{21}$	$+\varrho^4 A_{21}$	$-\varrho^3 A_{23}$
$\overset{+}{V}_2-\overset{-}{V}_2$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{31}$	$-\varrho A_{33}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^4 A_{31}$	$-\varrho^3 A_{33}$
$\overset{+}{W}_1-\overset{-}{W}_1$	$-\varrho^4 A_{41}$	$+\varrho^4 A_{41}$	$-\varrho^3 A_{43}$	$-\varrho^2 A_{41}$	$+\varrho^2 A_{41}$	$-\varrho^4 A_{43}$
$\overset{+}{W}_2-\overset{-}{W}_2$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{51}$	$-\varrho^3 A_{53}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^2 A_{51}$	$-\varrho^4 A_{53}$
$\overset{+}{W}_3-\overset{-}{W}_2$	$-\varrho^4 A_{61}$	$+\varrho^4 A_{61}$	$-\varrho^3 A_{63}$	$-\varrho^2 A_{61}$	$+\varrho^2 A_{61}$	$-\varrho^4 A_{63}$

27. Ist nun $\bar{b}_3$ der zu b_3 in bezug auf den Punkt $z=0$ symmetrische Weg (vergl. Fig. 14), und bezeichnen wir den Wert der sechs Integrale (2) genommen über $\bar{b}_3$ mit

$$\overline{A}_{\mu 3}, \ (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

während der Wert der sechs Integrale (2) genommen über b_3 gleich

$$-A_{\mu 3}, \ (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

ist, so ergeben sich analog den Gl. (4) die Relationen:

$$(5) \qquad \begin{cases} A_{13} = +\overline{A}_{13}; \\ A_{23} = +\overline{A}_{23}, \ A_{33} = -\overline{A}_{33}; \\ A_{43} = +\overline{A}_{43}, \ A_{53} = -\overline{A}_{53}, \ A_{63} = +\overline{A}_{63}. \end{cases}$$

Andererseits ist aber, wenn man in der in Artikel 10 beschriebenen Weise über $\bar{b}_3$ integriert:

$$(6) \qquad \int_{\bar{b}_3} + \int_{b_3} = 0,$$

oder:

$$(7) \qquad \begin{cases} A_{13} = +\overline{A}_{13}; \\ A_{23} = +\overline{A}_{23}. \ A_{33} = +\overline{A}_{33}; \\ A_{43} = +\overline{A}_{43}, \ A_{53} = +\overline{A}_{53}, \ A_{63} = +\overline{A}_{63} \end{cases}$$

Aus den Gl. (5) und (7) folgt:

$$(8) \qquad A_{33} = A_{53} = 0.$$

Der damit erreichte Stand der Untersuchung wird durch nachstehende Tabelle XII veranschaulicht:

XII.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{U}-\overset{-}{U}$	A_{11}	$-A_{11}$	A_{13}	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{11}$	$+(\varrho^2+\varrho^3)A_{11}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{13}$
$\overset{+}{V}_1-\overset{-}{V}_1$	A_{21}	$-A_{21}$	A_{23}	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{21}$	$+(\varrho^2+\varrho^3)A_{21}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{23}$
$\overset{+}{V}_2-\overset{-}{V}_2$	A_{31}	$+A_{31}$	0	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{31}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{31}$	0
$\overset{+}{W}_1-\overset{-}{W}_1$	A_{41}	$-A_{41}$	A_{43}	$-(\varrho+\varrho^4)A_{41}$	$+(\varrho+\varrho^4)A_{41}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{43}$
$\overset{+}{W}_2-\overset{-}{W}_2$	A_{51}	$+A_{51}$	0	$-(\varrho+\varrho^4)A_{51}$	$-(\varrho+\varrho^4)A_{51}$	0
$\overset{+}{W}_3-\overset{-}{W}_3$	A_{61}	$-A_{61}$	A_{63}	$-(\varrho+\varrho^4)A_{61}$	$+(\varrho+\varrho^4)A_{61}$	$-(\varrho^2+\varrho^3)A_{63}$
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{U}-\overset{-}{U}$	$-\varrho^2A_{11}$	$+\varrho^2A_{11}$	$-\varrho^4A_{13}$	$-\varrho A_{11}$	$+\varrho A_{11}$	$-\varrho^2A_{13}$
$\overset{+}{V}_1-\overset{-}{V}_1$	$-\varrho^3A_{21}$	$+\varrho^3A_{21}$	$-\varrho A_{23}$	$-\varrho^4A_{21}$	$+\varrho^4A_{21}$	$-\varrho^3A_{23}$
$\overset{+}{V}_2-\overset{-}{V}_2$	$-\varrho^3A_{31}$	$-\varrho^3A_{31}$	0	$-\varrho^4A_{31}$	$-\varrho^4A_{31}$	0
$\overset{+}{W}_1-\overset{-}{W}_1$	$-\varrho^4A_{41}$	$+\varrho^4A_{41}$	$-\varrho^3A_{43}$	$-\varrho^2A_{41}$	$+\varrho^2A_{41}$	$-\varrho^4A_{43}$
$\overset{+}{W}_2-\overset{-}{W}_2$	$-\varrho^4A_{51}$	$-\varrho^4A_{51}$	0	$-\varrho^2A_{51}$	$-\varrho^2A_{51}$	0
$\overset{+}{W}_3-\overset{-}{W}_3$	$-\varrho^4A_{61}$	$+\varrho^4A_{61}$	$-\varrho^3A_{63}$	$-\varrho^2A_{61}$	$+\varrho^2A_{61}$	$-\varrho^4A_{63}$

28. Diese Tabelle enthält noch nicht die aus Gl. (13) § 4 folgenden Relationen. Um diese in übersichtlicher Form zu erhalten, gehen wir zu den »halbnormierten« Integralen 1. Gattung U^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^* und W_3^* des § 4 (siehe § 4 Gl. (11), (9) und (6)) über. Nach Gl. (7) § 4 braucht man dazu die Tatsache, dass

$$A_{13} \neq \text{ und } D'_{13} \neq 0$$

ist. Nach Tabelle XII ist aber:

$$D'_{13} = 2 A_{21} A_{31},$$

und die Gl. (10) § 4 ergeben daher mit Rücksicht auf Gl. (4) und (8):

$$\omega_1 = \frac{A_{31} A_{23}}{2 A_{21} A_{31}} = \frac{A_{23}}{2 A_{21}},$$

$$\omega_2 = -\frac{A_{31} A_{23}}{2 A_{21} A_{31}} = -\frac{A_{23}}{2 A_{21}},$$

also

$$\omega_1 = -\omega_2 .$$

Wir bezeichnen

(9) $$\omega_1 = -\omega_2 = \frac{A_{23}}{2 A_{21}} = \omega .$$

Nach Gl. (16) § 4 ist dann

(10) $$\Omega = 1 - 2(\varrho + \varrho^4)\omega^2 \neq 0.$$

Wir erhalten also das merkwürdige Resultat:

Auf unserer zentrisch symmetrischen Riemann'schen Fläche hängen die Periodizitätsmoduln der sechs Normalintegrale 1. Gattung und mit ihnen die Thetafunktion von nur einem Modul ab.

Die Tabelle der Periodizitätsmoduln der Normalintegrale des Falles $I_{18} = 0$ geht aus Tabelle X durch Eintragung des Wertes $\omega = \omega_1 = -\omega_2$ hervor.

29. Infolge der Relation

$$\omega_1 = -\omega_2 = \omega$$

gestaltet sich der Zusammenhang zwischen den Normalintegralen u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 und den Fundamentalintegralen U, V_1, V_2, W_1, W_2, W_3 (Gl. (2)) sehr einfach. Nach Gl. (19) und (17) § 4 ist zunächst mit Rücksicht auf Gl. (9):

(11) $$\left\{\begin{aligned} U^* &= (\varrho + \varrho^4)\,\omega(u_1 - u_2) + \omega(u_4 - u_5) + u_3 - (\varrho + \varrho^4)\,u_6;\\ V_1^* &= u_1 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_4 + \omega(u_3 - (\varrho + \varrho^4)\,u_6),\\ V_2^* &= u_2 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_5 - \omega(u_3 - (\varrho + \varrho^4)\,u_6);\\ W_1^* &= u_1 - (\varrho + \varrho^4)\,u_4,\\ W_2^* &= u_2 - (\varrho + \varrho^4)\,u_5,\\ W_3^* &= u_3 - (\varrho^2 + \varrho^3)\,u_6; \end{aligned}\right.$$

und endlich nach § 4 Gl. (11), (8), (5) mit Berücksichtigung der Gl. (4) und (8):

$$
(12)\left\{\begin{aligned}
U &= A_{13}\,U^* &&= A_{13}\{(\varrho+\varrho^4)\,\omega(u_1-u_2)+\omega(u_4-u_5)+u_3-(\varrho+\varrho^4)\,u_6\}\\
V_1 &= A_{21}(V_1^*-V_2^*) &&= A_{21}\{u_1-u_2-(\varrho^2+\varrho^3)(u_4-u_5)+2\,\omega(u_3-(\varrho+\varrho^4)\,u_6)\}\\
V_2 &= A_{31}(V_1^*+V_2^*) &&= A_{31}\{u_1+u_2-(\varrho^2+\varrho^3)(u_4+u_5)\}\\
W_1 &= A_{41}(W_1^*-W_2^*)+A_{43}\,W_3^* &&= A_{41}\{u_1-u_2-(\varrho+\varrho^4)(u_4-u_5)\}+A_{43}\{u_3-(\varrho^2+\varrho^3)\,u_6\}\\
W_2 &= A_{51}(W_1^*+W_2^*) &&= A_{51}\{u_1+u_2-(\varrho+\varrho^4)(u_4+u_5)\}\\
W_3 &= A_{61}(W_1^*-W_2^*)+A_{63}\,W_3^* &&= A_{61}\{u_1-u_2-(\varrho+\varrho^4)(u_4-u_5)\}+A_{63}\{u_3-(\varrho^2+\varrho^3)\,u_6\}\,.
\end{aligned}\right.
$$

§ 11. **Zerfällung der Thetafunktion.**

30. Nach Artikel 3 muss die in Artikel 17 angegebene Thetafunktion

$$
(1)\qquad \vartheta(u_1\,|\,u_2\,|\,u_3\,|\,u_4\,|\,u_5\,|\,u_6)=\sum e^{\pi i f_6+2\pi i(m_1u_1+m_2u_2+m_3u_3+m_4u_4+m_5u_5+m_6u_6)}
$$

($m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ von $-\infty$ bis $+\infty$), worin

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad f_6 = {}&\\
&\frac{(344\bar{3})}{5\,\Omega}\Big\{\omega_1 m_1+\omega_2 m_2-(0110)^2 m_3-(0110)\,(\omega_1 m_4+\omega_2 m_5+m_6)\Big\}^2\\
&+\frac{1}{5}\Big\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_1^2-2\,(2413)\,m_1 m_4+(4321)\,m_4^2\Big\}\\
&+\frac{1}{5}\Big\{(12\bar{2}\bar{1})\,m_2^2-2\,(2413)\,m_2 m_5+(4321)\,m_5^2\Big\}\\
&-\frac{1}{5}\Big\{(2\bar{1}1\bar{2})\,m_3^2+2\,(1234)\,m_3 m_6-(2413)\,m_6^2\Big\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\Omega = 1-(\varrho+\varrho^4)(\omega_1^2+\omega_2^2)
$$

ist, für $\omega_1=-\omega_2=\omega$ zerfällbar sein in Faktoren vom Geschlecht $p=2$ und $p=4$. Infolge der Relation $\omega_1=-\omega_2=\omega$ nimmt f_6 folgende einfache Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad f_6 = {}&\frac{(3\bar{4}4\bar{3})}{5\,\Omega}\Big\{\omega(m_1-m_2)-(0110)^2 m_3-(0110)\,(\omega(m_4-m_5)+m_6)\Big\}^2\\
&+\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\,(m_1^2+m_2^2)+\frac{1}{5}(4321)\,(m_4^2+m_5^2)-\frac{2}{5}(2413)\,(m_1 m_4+m_2 m_5)\\
&-\frac{1}{5}\Big\{(2\bar{1}1\bar{2})\,m_3^2+2\,(1234)\,m_3 m_6-(2413)\,m_6^2\Big\},
\end{aligned}
$$

die es statt einer systematischen Untersuchung über die Methodik des Zerfällens nahelegt, folgenden Ansatz zu versuchen:

$$(4) \qquad \begin{cases} m_1 + m_2 = \nu_1, & m_1 - m_2 = \mu_1, & m_3 = \mu_2, \\ m_4 + m_5 = \nu_2, & m_4 - m_5 = \mu_3, & m_6 = \mu_4. \end{cases}$$

Dann ist:

$$(5) \qquad \begin{cases} m_1 = \dfrac{\nu_1 + \mu_1}{2}, & m_3 = \mu_2, & m_4 = \dfrac{\nu_2 + \mu_3}{2}, \\ m_2 = \dfrac{\nu_1 - \mu_1}{2}, & m_6 = \mu_4, & m_5 = \dfrac{\nu_2 - \mu_3}{2}. \end{cases}$$

Also:

$$(6) \qquad m_1^2 + m_2^2 = \frac{\nu_1^2 + \mu_1^2}{2}, \quad m_4^2 + m_5^2 = \frac{\nu_2^2 + \mu_3^2}{2},$$

$$m_1 m_4 + m_2 m_5 = \frac{\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_3}{2}.$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} & f_6(m_1 | m_2 \; m_3 \; m_4 | m_5 | m_6) = \\ & \frac{(3\bar{4}4\bar{3})}{5\,\Omega} \left\{ \omega\mu_1 - (0110)^2 \mu_2 - (0110)(\omega\mu_3 + \mu_4) \right\}^2 \\ & + \frac{1}{10}(12\bar{2}\bar{1})(\nu_1^2 + \mu_1^2) + \frac{1}{10}(4321)(\nu_2^2 + \mu_3^2) - \frac{1}{5}(2413)(\nu_1 \nu_2 + \mu_1 \mu_3) \\ & - \frac{1}{5}\left\{ (2\bar{1}1\bar{2})\mu_2^2 + 2(1234)\mu_2\mu_4 - (2413)\mu_4^2 \right\}, \end{aligned}$$

wo sofort auffällt, dass kein μ mit einem ν multipliziert auftritt. Daher zerfällt $f_6(m_1|m_2|m_3|m_4|m_5|m_6)$ in die Summe zweier quadratischer Formen $f_4(\mu_1|\mu_2|\mu_3|\mu_4)$ und $f_2(\nu_1|\nu_2)$, also:

$$(7) \qquad f_6(m_1|m_2|m_3|m_4|m_5|m_6) = f_4(\mu_1|\mu_2|\mu_3|\mu_4) + f_2(\nu_1|\nu_2),$$

wo

$$(8) \qquad \begin{aligned} f_4(\mu_1|\mu_2|\mu_3|\mu_4) = & \frac{(3\bar{4}4\bar{3})}{5\,\Omega} \left\{ \omega\mu_1 - (0110)^2 \mu_2 - (0110)(\omega\mu_3 + \mu_4) \right\}^2 \\ & + \frac{1}{10}\left\{ (12\bar{2}\bar{1})\mu_1^2 - 2(2413)\mu_1\mu_3 + (4321)\mu_3^2 \right\} \\ & - \frac{1}{5}\left\{ (2\bar{1}1\bar{2})\mu_2^2 + 2(1234)\mu_2\mu_4 - (2413)\mu_4^2 \right\}. \end{aligned}$$

und

$$(9) \qquad f_2(\nu_1|\nu_2) = \frac{1}{10}\left\{ (12\bar{2}\bar{1})\nu_1^2 - 2(2413)\nu_1\nu_2 + (4321)\nu_2^2 \right\}$$

ist.

31. Führt man in der Linearform

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6$$

des Exponenten der Thetafunktion (Gl. (1)) die Substitution (5) aus, so gruppieren sich die u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 zu folgenden Verbindungen:

$$(10) \qquad \begin{cases} u_1 - u_2 = 2u'_1, & u_3 = u'_2, \qquad u_4 - u_5 = 2u'_3, \\ u_1 + u_2 = 2u''_1, & u_6 = u'_4, \qquad u_4 + u_5 = 2u''_2, \end{cases}$$

und es wird:

$$(11) \qquad \begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + m_4 u_4 + m_5 u_5 + m_6 u_6 = \\ (\mu_1 u'_1 + \mu_2 u'_2 + \mu_3 u'_3 + \mu_4 u'_4) + (\nu_1 u''_1 + \nu_2 u''_2). \end{cases}$$

Daher ist:

$$(12) \qquad \vartheta(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) =$$
$$\sum e^{\pi i f_4(\mu_1|\mu_2|\mu_3|\mu_4) + 2\pi i(\mu_1 u'_1 + \mu_2 u'_2 + \mu_3 u'_3 + \mu_4 u'_4)} \cdot e^{\pi i f_2(\nu_1|\nu_2) + 2\pi i(\nu_1 u''_1 + \nu_2 u''_2)},$$

und wir dürfen jetzt hoffen, die sechsfach unendliche Reihe so zu zerfällen, dass der eine Bestandteil nur nach den μ, der andere nur nach den ν summiert wird. Nun waren andererseits V_2 und W_2 ursprünglich die Integrale, die sich auf das Geschlecht $p = 2$ reduzieren liessen; von ihnen wird auch die Thetafunktion vom Geschlecht $p = 2$ abhängen. Soll unsere Hoffnung berechtigt sein, so müssen also u''_1, u''_2 lineare Funktionen von V_2 und W_2 sein. In der Tat ist nach Gl. (10) und Gl. (12) § 10:

$$(13) \qquad \begin{cases} U = A_{13}\{(\varrho + \varrho^4)\omega 2u'_1 + 2\omega u'_3 + u'_2 - (\varrho + \varrho^4)u'_4\}; \\ V_1 = A_{21}\{2u'_1 - (\varrho^2 + \varrho^3)2u'_3 + 2\omega(u'_2 - (\varrho + \varrho^4)u'_4)\}, \\ V_2 = A_{31}\{2u''_1 - (\varrho^2 + \varrho^3)2u''_2\}; \\ W_1 = A_{41}\{2u'_1 - (\varrho + \varrho^4)2u'_3\} + A_{43}\{u'_2 - (\varrho^2 + \varrho^3)u'_4\}. \\ W_2 = A_{51}\{2u''_1 - (\varrho + \varrho^4)2u''_2\}, \\ W_3 = A_{61}\{2u'_1 - (\varrho + \varrho^4)2u'_3\} + A_{63}\{u'_2 - (\varrho^2 + \varrho^3)u'_4\}. \end{cases}$$

32. Jetzt ist noch die Frage zu entscheiden, wie über die μ und ν summiert werden muss. Aus den Gl. (4) folgt:

1. $(i = 1, 4)$

a) Sind m_i und m_{i+1} gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade, so sind ν_1 und μ_1 bezw. ν_2 und μ_3 gleichzeitig gerade.

b) Sind m_i und m_{i+1} ungleichartig, so sind ν_1 und μ_1 bezw. ν_2 und μ gleichzeitig ungerade.

2. Zwei verschiedene Wertepaare m_i und m_{i+1} ergeben stets zwei verschiedene Wertepaare ν_1, μ_1 bezw. ν_2, μ_3.

Folglich hat man über die ν_1, ν_2 und μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 so zu summieren, dass

1. ν_1 und μ_1 stets gleichartig sind.
2. ν_2 » μ_3 » » »
3. μ_2 » μ_4 dagegen alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Summiert man also erst über die geraden Werte von ν_1 und μ_1:

$$\nu_1 = 2n_1,$$
$$\mu_1 = 2m'_1,$$

und dann über alle ungeraden Werte von ν_1 bezw. μ_1:

$$\nu_1 = 2n_1 + 1,$$
$$\mu_1 = 2m'_1 + 1,$$

so zerfällt die Thetafunktion (12) in zwei Summanden. Jeder Summand zerfällt für sich nochmals in zwei Summanden, wenn wir zuerst über alle geraden Werte von ν_2 und μ_3:

$$\nu_2 = 2n_2,$$
$$\mu_3 = 2m'_3,$$

und dann über alle ungeraden Werte von ν_2 und μ_3:

$$\nu_2 = 2n_2 + 1,$$
$$\mu_3 = 2m'_3 + 1,$$

summieren. Setzen wir noch der Analogie wegen

$$\mu_2 = m'_2,$$
$$\mu_4 = m'_4,$$

und lassen schliesslich, da keine Verwechselung mehr möglich ist, an den m' die Striche weg, so erhalten wir folgendes Schlussresultat:

$$\vartheta(u_1 | u_2 | u_3 | u_4 | u_5 | u_6) = \theta_1 \vartheta_1 + \theta_2 \vartheta_2 + \theta_3 \vartheta_3 + \theta_4 \vartheta_4, \tag{14}$$

wo

$$(14\mathrm{a})\left\{\begin{aligned}
\theta_1 &= \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 | m_2 | 2m_3 | m_4) + 2\pi i (2m_1 u'_1 + m_2 u'_2 + 2m_3 u'_3 + m_4 u'_4)} \\
\theta_2 &= \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 | m_2 | 2m_3 + 1 | m_4) + 2\pi i (2m_1 u'_1 + m_2 u'_2 + (2m_3 + 1) u'_3 + m_4 u'_4)} \\
\theta_3 &= \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 + 1 | m_2 | 2m_3 | m_4) + 2\pi i ((2m_1 + 1) u'_1 + m_2 u'_2 + 2m_3 u'_3 + m_4 u'_4)} \\
\theta_4 &= \sum_m e^{\pi i f_4(2m_1 + 1 | m_2 | 2m_3 + 1 | m_4) + 2\pi i ((2m_1 + 1) u'_1 + m_2 u'_2 + (2m_3 + 1) u'_3 + m_4 u'_4)}
\end{aligned}\right.$$

und

$$(14\mathrm{b})\left\{\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 | 2n_2) + 2\pi i (2n_1 u''_1 + 2n_2 u''_2)} \\
\vartheta_2 &= \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 | 2n_2 + 1) + 2\pi i (2n_1 u''_1 + (2n_2 + 1) u''_2)} \\
\vartheta_3 &= \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 + 1 | 2n_2) + 2\pi i ((2n_1 + 1) u''_1 + 2n_2 u''_2)} \\
\vartheta_4 &= \sum_n e^{\pi i f_2(2n_1 + 1 | 2n_2 + 1) + 2\pi i ((2n_1 + 1) u''_1 + (2n_2 + 1) u''_2)},
\end{aligned}\right.$$

wo jede dieser Summationen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist.

§ 12. **Schlussergebnis.**

33. Durch die Gl. (14) des § 11 ist das Reduktionsproblem im wesentlichen gelöst. Auf die weitere Ausarbeitung dieser Gleichung durch Einführung von Charakteristiken und Anwendung der Multiplikationsformeln[1] können wir hier nicht eingehen. Doch sei hervorgehoben, dass die Thetafunktionen vom Geschlecht $p = 2$, auf die wir gestossen sind, lauter numerisch bestimmte Moduln haben; sie lassen sich durch eine Transformation von irrationaler Ordnung weiter zerlegen, worauf wir jedoch auch nicht eingehen wollen. Die Thetafunktionen vom Geschlecht $p = 4$, die bei der Zerfällung der allgemeinen Thetafunktion aufgetreten sind, hängen von einem einzigen Modul ω ab.

34. Es bleibt nur noch übrig, für die Verbindungen der Normalintegrale, die in den Thetafunktionen von den Geschlechtern $p = 2$ und $p = 4$ auftreten, die Periodizitätsmoduln anzugeben. Mit Rücksicht auf Gl. (9) § 10 und Gl. (10) § 11 ergeben sich aus Tabelle X die Tabellen XIII und XIV:

[1] Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Kapitel V, § 10.

XIII.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{u}'_1 - \overset{-}{u}'_1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\overset{+}{u}'_2 - \overset{-}{u}'_2$	0	0	1	0	0	0
$\overset{+}{u}'_3 - \overset{-}{u}'_3$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\overset{+}{u}'_4 - \overset{-}{u}'_4$	0	0	0	0	0	1
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{u}'_1 - \overset{-}{u}'_1$	$\frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega^2}{\Omega}+\frac{1}{10}(12\bar{2}\bar{1})$	$\frac{1}{5}(3\bar{4}4\bar{3})\frac{\omega^2}{\Omega}-\frac{1}{10}(12\bar{2}1)$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(1\bar{3}31)\frac{\omega^2}{\Omega}-\frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{5}(1\bar{3}31)\frac{\omega^2}{\Omega}+\frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega}{\Omega}$
$\overset{+}{u}'_2 - \overset{-}{u}'_2$	$-\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$	$+\frac{1}{5}(211\bar{2})\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(3\bar{1}13)\frac{1}{\Omega}-\frac{1}{5}(21\bar{1}2)$	$-\frac{1}{5}(122\bar{1})\frac{\omega}{\Omega}$	$+\frac{1}{5}(1221)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{1}{\Omega}-\frac{1}{5}(1234)$
$\overset{+}{u}'_3 - \overset{-}{u}'_3$	$\frac{1}{5}(1\bar{3}31)\frac{\omega^2}{\Omega}+\frac{1}{10}(2413)$	$\frac{1}{5}(1\bar{3}31)\frac{\omega^2}{\Omega}+\frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{5}(12\bar{2}\bar{1})\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(211\bar{2})\frac{\omega^2}{\Omega}+\frac{1}{10}(4321)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega^2}{\Omega}-\frac{1}{10}(4321)$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{\omega}{\Omega}$
$\overset{+}{u}'_4 - \overset{-}{u}'_4$	$-\frac{1}{5}(1331)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(1\bar{3}3\bar{1})\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(1221)\frac{1}{\Omega}-\frac{1}{5}(1234)$	$\frac{1}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega}{\Omega}$	$-\frac{1}{5}(2\bar{1}12)\frac{\omega}{\Omega}$	$\frac{1}{5}(2112)\frac{1}{\Omega}+\frac{1}{5}(2413)$

und:

XIV.

an:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$\overset{+}{u}''_1 - \overset{-}{u}''_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$\overset{+}{u}''_2 - \overset{-}{u}''_2$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
an:	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$\overset{+}{u}''_1 - \overset{-}{u}''_1$	$\frac{1}{10}(122\bar{1})$	$\frac{1}{10}(1221)$	0	$-\frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{10}(2413)$	0
$\overset{+}{u}''_2 - \overset{-}{u}''_2$	$-\frac{1}{10}(2413)$	$-\frac{1}{10}(2413)$	0	$\frac{1}{10}(4321)$	$\frac{1}{10}(4321)$	0

Es hängen also tatsächlich, wie Artikel 33 es verlangt, die Periodizitätsmoduln der Integrale u'_1, u'_2, u'_3 und u'_4 von einem einzigen Modul ω ab, der sich aber aus den Periodizitätsmoduln der Integrale u''_1 und u''_2 heraushebt.

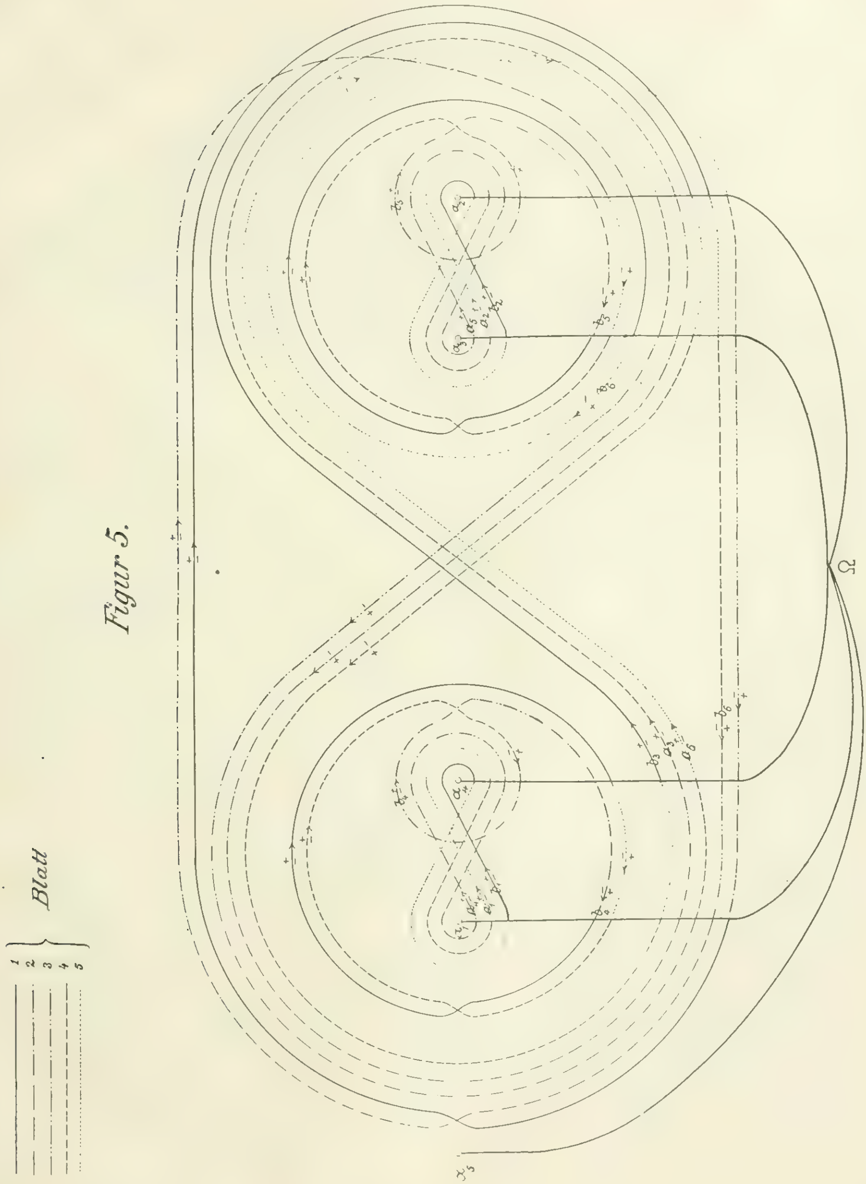
Damit wollen wir unsere Untersuchungen abschliessen.

Nachtrag:

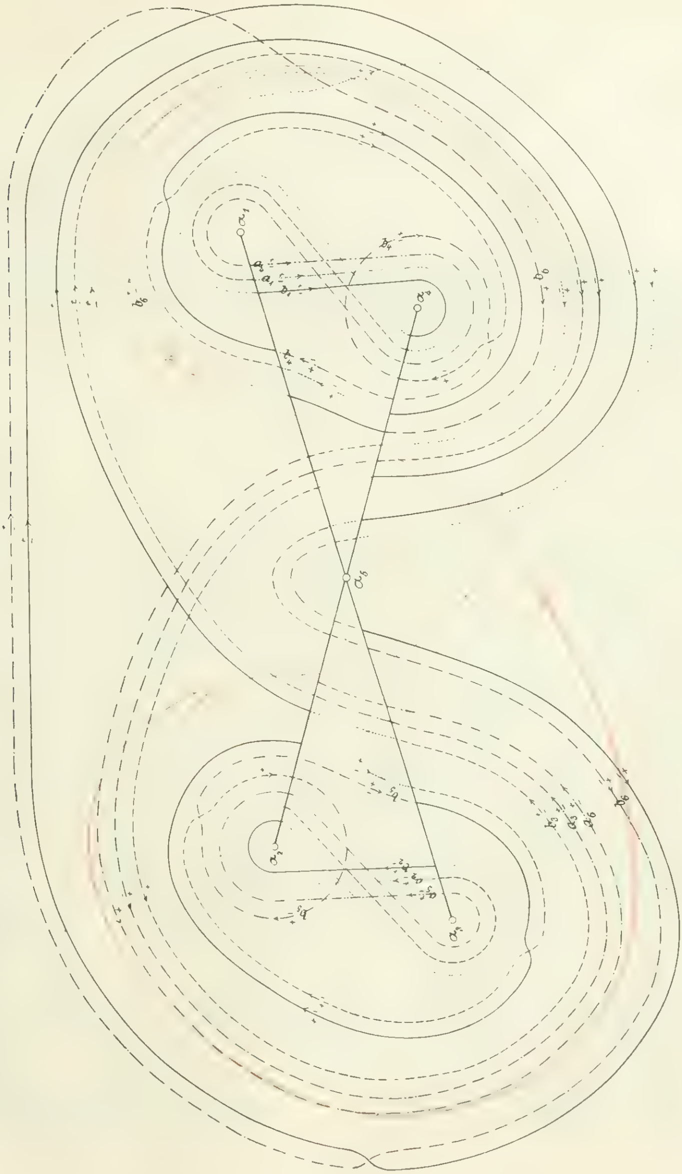
Die Arbeit über den auf Pag. 1 erwähnten Fall $n = 3$ ist inzwischen erschienen, nämlich:

K. Sauer, Zur Funktionentheorie auf dem algebraischen Gebilde $s = \sqrt[3]{f_{3n}(z)}$. Strassburger Dissertation, Leipzig 1906.

Inhaltsverzeichnis.



Figur 5.



Figur 14.

Blatt 1 2 3 4 5

ÜBER DIE AUS DEN SINGULÄREN STELLEN EINER ANALYTISCHEN FUNKTION MEHRERER VERÄNDERLICHEN BESTEHENDEN GEBILDE.

VON

F. HARTOGS

IN MÜNCHEN.

Über die allgemeinen Eigenschaften derjenigen Gebilde, welche aus den singulären Stellen einer analytischen Funktion mehrerer Veränderlichen bestehen, ist zur Zeit noch sehr wenig bekannt. [1] Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen den Zweck, die Beschränkungen festzustellen, denen diese Gebilde in den einfachsten und nächstliegenden (als Analoga zum Falle der *isolierten* singulären Stelle bei den Funktionen *einer* Veränderlichen aufzufassenden) Fällen unterworfen sind. Das Ergebnis lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass in diesen Fällen die Gebilde stets *analytische* sein müssen. [2] Ausführlicher sei heirüber, sowie insbesondere über die Gesichtspunkte, welche bei der genaueren Charakterisierung der zu untersuchenden Fälle massgebend waren, folgendes vorausgeschickt.

Für die Funktion $f(x, x' x'', \ldots, y)$ der unabhängigen Veränderlichen x, x', x'', ... und y sei die Stelle $x = x' = x'' = \cdots = y = 0$ eine singuläre. Ist dieselbe zunächst eine *ausserwesentlich* singuläre, — d. h. existieren zwei für die Umgebung dieser Stelle reguläre Funktionen $P(x, x', \ldots, y)$ und $Q(x, x', \ldots, y)$, welche so beschaffen sind, dass in allen Punkten der Umgebung, in denen $Q(x, x', \ldots, y)$ nicht verschwindet, die Relation

[1] Vgl. hierüber meinen Vortrag »Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variablen» (Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung 16 (1907), p. 223), in welchem ich eines der Resultate der vorliegenden Arbeit bereits kurz angedeutet habe.

[2] Genauer: »aus monogenen analytischen Gebilden $(n-1)$ter Stufe (Weierstrass, Werke III, p. 101) zusammengesetzt sein müssen», wobei n die Anzahl der unabhängigen komplexen Veränderlichen bedeutet.

$$f(x, x', \ldots, y) = \frac{P(x, x', \ldots, y)}{Q(x, x', \ldots, y)}$$

besteht, — so ist man über die Gesetze, nach welchen die in der Umgebung dieser Stelle gelegenen weiteren singulären Stellen verteilt sind, genau orientiert. Nimmt man nämlich in diesem Falle noch weiterhin an, dass die Funktionen $P(x, x', \ldots, y)$ und $Q(x, x', \ldots, y)$ — was sich durch geeignete Wahl derselben stets ermöglichen lässt — nicht beide durch eine und dieselbe, in der Umgebung des Punktes $(0, 0, \ldots, 0)$ reguläre und in diesem Punkte selbst verschwindende Funktion teilbar seien, so werden *die sämtlichen in einer gewissen Umgebung jenes Punktes gelegenen singulären Stellen von* $f(x, x', \ldots, y)$ *durch das Verschwinden der Funktion* $Q(x, x', \ldots, y)$ *gekennzeichnet.* Hieraus ergibt sich dann (wenn man von einem speziellen, durch lineare Transformation der Veränderlichen zu beseitigenden Ausnahmefalle absieht) durch Anwendung des Weierstrassschen »Vorbereitungssatzes«[1] des weiteren die Existenz einer positiven ganzen Zahl r von der Beschaffenheit, dass in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle *zu jedem Wertsystem* $x = \xi$, $x' = \xi'$, ... *genau* r *im allgemeinen von einander verschiedene singuläre Stellen* $(\xi, \xi', \ldots, \eta_1), \ldots, (\xi, \xi', \ldots, \eta_r)$ *jener Funktion gehören.*

Hiernach liegt es nun nahe, auch bei Singularitäten *beliebiger* Art als einfachsten Fall denjenigen anzusehen, in welchem in einer gewissen Umgebung der betrachteten singulären Stelle zu jedem Wertsysteme $x = \xi$, $x' = \xi'$, ... genau *ine* (ev. *höchstens* eine) singuläre Stelle $(\xi, \xi', \ldots, \eta)$ vorhanden ist. Dieser Fall ist im folgenden als erster behandelt und es ergibt sich dabei das (bei ausserwesentlich singulären Stellen unmittelbar aus dem Obigen hervorgehende) Resultat, dass η *stets eine für* $\xi = 0$, $\xi' = 0$, ... *reguläre analytische Funktion von* $\xi, \xi', \ldots$ *sein müsse.*

Geht man von diesem Falle, welcher dem Werte $r = 1$ entspricht, zu dem allgemeineren über, in welchem r einer beliebigen positiven ganzen Zahl gleich ist, so zeigt sich auch hier noch eine vollständige Analogie mit den Verhältnissen bei den ausserwesentlichen singulären Stellen: Die Gesamtheit der in der Umgebung gelegenen singulären Stellen wird nämlich stets durch das Verschwinden einer im Nullpunkte regulären Funktion gekennzeichnet. Das Ergebnis lässt sich hier etwas ausführlicher in der folgenden Weise darstellen:

Wenn überhaupt die Gesamtheit der in der Umgebung des Nullpunktes gelegenen singulären Stellen durch das Verschwinden einer im Nullpunkte

[1] Vgl. über diesen sowie über die im Vorstehenden berührten Dinge des Näheren Weierstrass, »Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze« (Abhandl. a. d. Funktionenlehre p. 107 = Werke II, p. 135) §§ 1—3. (Doch wird von diesen Untersuchungen im folgenden nirgends Gebrauch gemacht).

regulären Funktion charakterisiert wird (wie es bei den ausserwesentlichen singulären Stellen nach Obigem stets der Fall ist), so folgt — nötigenfalls nach Vornahme einer linearen Transformation der Veränderlichen — aus dem WEIERSTRASSschen Vorbereitungssatze die Existenz einer positiven Zahl r von der folgenden Beschaffenheit: In einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle gehören zu jedem Wertsystem $x = \xi$, $x' = \xi'$, ... *höchstens* r singuläre Stellen $(\xi, \xi', \ldots, \eta_1)$, ..., $(\xi, \xi', \ldots \eta_r)$ der betrachteten Funktion; unter den Wertsystemen ξ, ξ', ξ'', ... gibt es jedoch, sobald ξ', ξ'', ... festgehalten werden, nur eine *endliche* Anzahl, für welche die Anzahl der zugehörigen singulären Stellen *kleiner* als r ausfällt; analog bei Festhalten von ξ, ξ'', ξ''', ... usf. Das Resultat der nachfolgenden Untersuchungen ist nun, dass auch das *Umgekehrte* richtig ist; d. h. wenn man nur weiss, dass in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle zu jedem Wertsystem ξ, ξ', ... höchstens r singuläre Stellen der betrachteten Funktion gehören, und dass die Wertsysteme, für welche diese Anzahl kleiner als r ausfällt, in der angegebenen Weise beschränkt sind, *so wird diese Gesamtheit von singulären Stellen notwendig durch das Verschwinden einer im Nullpunkt regulären Funktion charakterisiert.*[1]

Über das Verhalten der Funktion für die Umgebung der betrachteten singulären Stellen wird bei diesen Untersuchungen keinerlei Annahme irgendwelcher Art gemacht; insbesondere darf auch eine Verzweigung der Funktion an jenen Stellen stattfinden.

Von den erwähnten Sätzen braucht nur derjenige direkt bewiesen zu werden, welcher sich auf den Fall $r = 1$ bei den Funktionen *zweier* Veränderlichen x und y bezieht, während alle übrigen sich dann ohne grössere Schwierigkeit als Folgerungen ergeben. Der Beweis jenes ersten Satzes stützt sich auf eine allgemeine Eigenschaft der Reihen von der Form

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\, y^\nu,$$

welche ich im 62. Bande der Math. Ann. hergeleitet habe; es war wünschenswert, über diesen Gegenstand in § 1 einige Bemerkungen vorauszuschicken. In § 2 wird sodann auf Grund dieses Hilfsmittels jener erste Satz zunächst unter etwas engeren Voraussetzungen bewiesen. Es folgt in § 3 der Beweis eines Hilfssatzes, durch welchen es ermöglicht wird (§ 4), den Ausgangssatz von jeglicher einschränkenden Voraussetzung zu befreien. § 5 enthält sodann die Erweiterung auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen und § 6 endlich auf den Fall, in welchem die Zahl r einen beliebigen Wert besitzt.

---

[1] Selbstredend bleibt letzteres auch dann noch richtig, wenn die Voraussetzungen nicht für die Variablen $x, x', \ldots, y$ selbst, sondern für irgend welche, durch eine homogene lineare Transformation aus ihnen hervorgehende Variable zutreffen.

§ 1.

Es liege eine Reihe

$$S(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x) y^\nu$$

vor, wobei x und y zwei unabhängige komplexe Veränderliche und $f_\nu(x)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) analytische Funktionen von x bedeuten, die für das in Betracht kommende Gebiet T der x-Ebene sämtlich eindeutig definiert und regulär seien.

Es sei nun $x = x_0$ ein beliebiger innerer Punkt des Gebietes T und die Kreisfläche $|x - x_0| \leqq \varrho_0$ gehöre dem Gebiete T noch vollständig an. Gibt es alsdann einen von null verschiedenen Wert $y = y_0$ von der Beschaffenheit, dass die Reihe $S(x, y_0)$ im Kreise $|x - x_0| \leqq \varrho_0$ gleichmässig konvergiert, so konvergiert $S(x, y)$ auch für jeden beliebigen, der Bedingung $|y| < |y_0|$ genügenden Wert von y im genannten Kreise gleichmässig. [1]

Daraus folgt aber unmittelbar: Fasst man die Gesamtheit aller derjenigen Werte $y = y_0$ ins Auge, zu welchen sich je eine (wenn auch noch so kleine) positive Grösse ϱ von der Eigenschaft nachweisen lässt, dass die Reihe $S(x, y_0)$ im Gebiete $|x - x_0| \leqq \varrho$ gleichmässig konvergiert, [2] und bezeichnet [3] die obere Grenze der absoluten Beträge aller dieser Werte von y mit R'_{x_0}, so *gehört sicher jeder der Bedingung* $|y| < R'_{x_0}$ *genügende* (*hingegen kein der Bedingung* $|y| > R'_{x_0}$ *genügender*) *Wert von* y *jener Gesamtheit an.*

Auf diese Weise wird also jedem inneren Punkt $x = x_0$ des Gebietes T eine wohlbestimmte reelle Grösse R'_{x_0} zugeordnet, welche null, positiv oder unendlich gross sein kann. Über diese von x abhängige Grösse R'_x gilt nun der folgende allgemeine Satz, dessen vollständiger Beweis sich auf Seite 46—47 meiner oben zitierten Abhandlung befindet:

(*I*). *Es bedeute B einen beliebigen, im Innern des obigen Gebietes T gelegenen Bereich der x-Ebene mit Einschluss seiner Begrenzungspunkte. Es sei ferner* p_x *eine für jedes x des Bereiches B eindeutig definierte positive Grösse, deren* (*reeller*) *Loga-*

---

[1] Denn nach Vorgabe einer beliebigen positiven Grösse ε gibt es eine Zahl N derart, dass für alle $n > N$: $\left|\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu(x) y_0^\nu\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ und somit $|f_n(x) y_0^n| < \varepsilon$, welchen Wert x innerhalb jener Kreisfläche auch haben möge. Daraus folgt aber, sobald $|y| < |y_0|$:

$$|f_n(x) y^n| < \varepsilon \left|\frac{y}{y_0}\right|^n \qquad (n > N)$$

und somit auch das Behauptete.

[2] Offenbar gehört $y = 0$ dieser Gesamtheit stets an.

[3] Vgl. Math. Ann. 62 (1906), insb. p. 3, p. 24 und p. 25 (erste Fussnote).

rithmus im Bereiche B stetig ist und für jeden inneren Punkt von B stetige, der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \log p_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial v^2} = 0 \qquad (x = u + iv)$$

genügende partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v besitzt. Gilt alsdann $R'_x \geqq p_x$ für jeden Begrenzungspunkt x des Bereiches B, so gilt das nämliche auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B. (Ist also speziell $R'_x = p_x$ längs der Begrenzung, so gilt im ganzen Innern $R'_x \geqq p_x$.)

Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition der Grösse R'_x ist, dass falls $x = x_0$ einen beliebigen inneren Punkt von T bedeutet, nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse ε stets eine zweite, δ, von der Beschaffenheit vorhanden sein muss, dass $R'_x \geqq R'_{x_0} - \varepsilon$ verbleibt, solange nur $|x - x_0| < \delta$ ist. Unter Anwendung dieser Eigenschaft der Grösse R'_x, welche in der erwähnten Abhandlung zur Abkürzung als »einseitige Stetigkeit» bezeichnet ist, ergibt sich aus vorstehendem Satze durch eine einfache Überlegung folgendes Korollar: [1]

(*I a*). *Sind die Voraussetzungen des Satzes (I) sämtlich erfüllt, und gilt auch nur für einen einzigen inneren Punkt $x = x_0$ des Bereiches B:* [2]

$$R'_x = p_x,$$

so besteht diese Gleichung auch für jeden beliebigen Punkt x des Bereiches B.

Endlich ist hier noch der folgende Satz anzuführen, welcher die singulären Stellen des durch $S(x, y)$ dargestellten Funktionszweiges betrifft: [3]

(*II*). *Es bedeute $x = x_0$ wiederum irgend einen inneren Punkt des Gebietes T und es sei $R'_{x_0} > 0$. Alsdann sind die Stellen (x_0, y) $(|y| < R'_{x_0})$ für $S(x, y)$ sämtlich reguläre; hingegen gibt es für den durch $S(x, y)$ dargestellten Funktionszweig mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche $|y_0| = R'_{x_0}$ ist.*

Beweis. Ist $y = b$ irgend ein der Bedingung $|b| < R'_{x_0}$ genügender Wert und wählt man ϱ' der Bedingung $|b| < \varrho' < R'_{x_0}$ entsprechend, so gibt es ein noch im Innern von T liegendes Gebiet $|x - x_0| \leqq \varrho$, in welchem $S(x, \varrho')$ gleichmässig konvergiert. Entwickelt man daher die sämtlichen Funktionen $f_\nu(x)$ nach Potenzen von $x - x_0$, so geht aus $S(x, y)$ eine nach Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ hervor, welche im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$

---

[1] Vgl. a. a. O. p. 47—48. (Die Anwendung dieses Korollars kann bei den nachfolgenden Untersuchungen auch umgangen werden, vergl. p. 65, Fussnote [1]).

[2] Während beim Satze (I) über den Bereich B nichts weiter vorausgesetzt zu werden braucht, als dass er eine *abgeschlossene* Punktmenge darstelle, so muss beim Satze (I a) der Bereich B auch ein *zusammenhängender* sein. (Genaueres siehe a. a. O. p. 8, Fussnote.) In der vorliegenden Abhandlung finden beide Sätze nur für den Fall einer Kreisfläche Anwendung.

[3] Vgl. a. a. O., p. 28.

absolut konvergiert[1] und dem Werte nach mit $S(x, y)$ übereinstimmt; $S(x, y)$ stellt somit eine im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$, speziell also in der Umgebung des Punktes (x_0, b) reguläre analytische Funktion $f(x, y)$ von x und y dar.

Verhielte sich nun andererseits die soeben definierte (u. a. im Gebiete $|x - x_0| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ reguläre) Funktion $f(x, y)$ auch noch im Gebiete $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y| < R'_{x_0} + \varepsilon$ durchweg regulär, wobei ε eine gewisse positive Zahl bezeichnet, so müsste $\mathfrak{P}(x - x_0, y)$ auch in diesem Gebiete noch *absolut* und $S(x, y)$ infolgedessen für jeden der Bedingung $|y| < R'_{x_0} + \varepsilon$ genügenden Wert y im Bereiche $|x - x_0| < \varepsilon_0$ $(\varepsilon_0 < \varepsilon)$ *gleichmässig* konvergieren, welch letzteres aber der Definition von R'_{x_0} direkt widerspräche. Mithin besitzt $f(x, y)$ notwendig mindestens eine singuläre Stelle (x_1, y_1), welche der Bedingung $|x_1 - x_0| < \varepsilon$, $|y_1| < R'_{x_0} + \varepsilon$ genügt. Mit Rücksicht darauf, dass ε beliebig klein gewählt werden konnte, dass ferner jede Häufungsstelle von singulären Stellen wieder eine ebensolche ist, endlich, dass eine singuläre Stelle (x_0, y_0), für welche geradezu $|y_0| < R'_{x_0}$ wäre, nach Obigem ausgeschlossen ist, folgt daraus ohne weiteres die Behauptung.

§ 2.

Der erste der herzuleitenden Sätze möge zunächst in der folgenden engeren Fassung ausgesprochen und bewiesen werden:

Es sei $x = 0$, $y = 0$ eine singuläre Stelle für einen gewissen, im Gebiete $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ eindeutigen Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y. Zu jedem der Bedingung $|\xi| < \varrho$ genügenden Werte ξ möge für $f(x, y)$ eine und nur eine singuläre Stelle $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$ existieren, deren y-Koordinate $\eta = \varphi(\xi)$ dem absoluten Betrage nach unterhalb ϱ' liegt, und es möge ferner $\eta = \varphi(\xi)$ für $|\xi| < \varrho$ einen mit ξ stetig sich ändernden Wert besitzen. Alsdann stellt $\eta = \varphi(\xi)$ notwendig eine für $\xi = 0$ reguläre analytische Funktion von ξ dar.

Beweis. Infolge der Stetigkeit der (für $\xi = 0$ verschwindenden) Funktion $\eta = \varphi(\xi)$ lässt sich eine positive, unterhalb ϱ gelegene Zahl $2h$ angeben, derart, dass $|\varphi(\xi)| < \frac{1}{5}\varrho'$ bleibt, solange nur $|\xi| < 2h$ ist. Im Gebiete $|x| < 2h$,

[1] Gemäss folgendem Satze: *Konvergiert die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x - x_0)\rho'^\nu$, *wo* $\mathfrak{P}_\nu(x - x_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}(x - x_0)^\mu$, *im Bereiche* $|x - x_0| \leq \rho$ *gleichmässig, so konvergiert die Doppelreihe* $\mathfrak{P}(x - x_0, y) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}(x - x_0)^\mu y^\nu$ *für* $|x - x_0| < \rho$, $|y| < \rho'$ *absolut.* Denn setzt man $\underset{|x - x_0| \leq \rho}{\mathrm{Max}} |\mathfrak{P}_\nu(x - x_0)| = g_\nu$, so ist nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse h für hinreichend grosse Werte von ν: $g_\nu \rho'^\nu < h$ und somit $|a_{\mu\nu}| \rho^\mu \rho'^\nu < h$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

$\frac{1}{5}\varrho' < |y| < \varrho'$ befindet sich alsdann überhaupt keine singuläre Stelle der Funktion $f(x, y)$.

Es werde nun eine positive Zahl k der Bedingung $\frac{1}{5}\varrho' < k < \frac{2}{5}\varrho'$ entsprechend beliebig gewählt und es sei $y = y_0$ ein beliebiger Wert mit dem absoluten Betrage k. Im Gebiete $|x| < 2h$, $|y - y_0| < k - \frac{1}{5}\varrho'$ ist $f(x, y)$ alsdann eindeutig und regulär und somit durch eine absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven Potenzen von x und $y - y_0$ fortschreitende Doppelreihe darstellbar. Indem man sich diese letztere nach Potenzen von $y - y_0$ geordnet denkt, erhält man für $f(x, y)$ eine im genannten Gebiete gültige Darstellung der folgenden Art:

$$f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)(y - y_0)^\nu = S(x, y - y_0),$$

wobei die $f_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für $|x| < 2h$ eindeutige und reguläre Funktionen von x bedeuten.

Legt man x irgend einen speziellen, der Bedingung $|x| < 2h$ genügenden Wert bei, so ist die Stelle $(x, \varphi(x))$ für die Funktion $f(x, y)$ eine singuläre, während alle Stellen (x, y), für welche $|y - y_0| < |\varphi(x) - y_0|$, sicher reguläre sind. Daraus folgt aber sofort gemäss Satz (II), dass die durch die Reihe $S(x, y - y_0)$ definierte Grösse R'_x für jeden der erwähnten Werte von x gleich $|\varphi(x) - y_0|$ ausfallen muss:

$$R'_x = |\varphi(x) - y_0| \qquad (|x| < 2h).$$

Da $\varphi(x)$ und somit auch R'_x für $|x| < 2h$ stetig ist, R'_x in diesem Gebiete überdies beständig oberhalb der positiven Zahl $k - \frac{1}{5}\varrho'$ verbleibt, so ist auch der (reelle) Logarithmus von R'_x für $|x| < 2h$, speziell also für $|x| = h$ stetig und es existiert somit eine von x abhängige positive Grösse p_x, welche für $|x| = h$ mit R'_x übereinstimmt, und deren reeller Logarithmus im Bereiche $|x| \leqq h$ stetig ist sowie für $|x| < h$ stetige, der Bedingung

$$\Delta \log p_x = \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log p_x}{\partial v^2} = 0 \qquad (x = u + iv)$$

genügende partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v besitzt.

Nach dem Satze (I) gilt alsdann für alle $|x| < h$ die Beziehung

$$R'_x \geqq p_x,$$

welche speziell für $x = 0$ (nach Logarithmierung)

$$\log k \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(h e^{i\vartheta}) - y_0| \, d\vartheta \tag{1}$$

liefert.

In dieser letzteren Ungleichung darf der Grösse y_0 jeder Wert beigelegt werden, dessen absoluter Betrag gleich k ist; setzt man also $y_0 = k \cdot e^{i\vartheta'}$, so gilt die Beziehung (1) für jeden beliebigen reellen Wert von ϑ', und somit auch noch dann, wenn man auf der rechten Seite in Bezug auf die zwischen 0 und 2π gelegenen Werte von ϑ' zum arithmetischen Mittel übergeht. So ergibt sich

$$\log k \geqq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(h e^{i\vartheta}) - k e^{i\vartheta'}| \, d\vartheta \, d\vartheta' . \tag{2}$$

Da nämlich der unter dem doppelten Integralzeichen stehende Ausdruck eine stetige Funktion der beiden Integrationsveränderlichen ϑ und ϑ' ist, so existiert das Doppelintegral und kann nach Belieben durch irgend eines der beiden zugehörigen *iterierten* Integrale ersetzt werden.

Beachtet man nun, dass (aus dem nämlichen Grunde) die rechte Seite der Beziehung (1) eine stetige Funktion von ϑ' ist,[1] so ist ersichtlich, dass, wenn in (1) auch nur für einen einzigen Wert von ϑ' das *Ungleichheits*zeichen gelten sollte, auch in (2) notwendig das *Ungleichheits*zeichen in Kraft treten müsste. Tatsächlich gilt aber in (2) das *Gleichheits*zeichen; denn da für einen beliebigen reellen Wert von ϑ:

$$|\varphi(h e^{i\vartheta})| < \frac{1}{5} \varrho'$$

ist, also $y = \varphi(h e^{i\vartheta})$ einen inneren Punkt des Kreises $|y| = k$ darstellt, so gilt bekanntlich:[2]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\varphi(h e^{i\vartheta}) - k e^{i\vartheta'}| \, d\vartheta' = \log k \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$$

und somit auch das Behauptete.

Demnach steht in (1) notwendig das Gleichheitszeichen, m. a. W. es ist in Bezug auf die oben betrachtete Reihe $S(x, y - y_0)$:

---

[1] Vgl. z. B. Jordan, Cours d'analyse I (1893), p. 72.

[2] In der Sprache der Potentialtheorie: »Das logarithmische Potential der (homogen mit Masse belegt gedachten) Kreisperipherie $|y| = k$ ist im Innern dieses Kreises konstant.«

$$R'_x = p_x$$

für $x = 0$ und somit nach dem Satze (Ia) auch für alle x, welche der Bedingung $|x| \leqq h$ genügen.[1]

Es besitzt mithin $\log R'_x$ (da mit $\log p_x$ identisch) für $|x| < h$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v, und ferner genügt $\log R'_x$ (und daher auch $\log R'^2_x$), für w eingesetzt, der Differentialgleichung

$$\varDelta w = 0,$$

R'^2_x selbst also der Differentialgleichung

$$w \varDelta w = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2, \tag{3}$$

solange nur $x = u + iv$ dem Absoluten Betrage nach unterhalb h bleibt.

Setzt man also

$$\varphi(x) = U + iV, \quad y_0 = \alpha + i\beta$$

sodass

$$R'^2_x = |\varphi(x) - y_0|^2 = (U - \alpha)^2 + (V - \beta)^2,$$

und beachtet, dass $y_0 = \alpha + i\beta$ lediglich der Beschränkung $\frac{1}{5}\varrho' < |y_0| < \frac{2}{5}\varrho'$ unterworfen war, sodass α und β innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von einander willkürlich gewählt werden konnten, so ist zunächst ersichtlich, dass auch U und V für $|x| < h$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach u und v besitzen müssen,[2] und es ergibt sich sodann aus (3) die für $|x| < h$ gültige Beziehung:

$$\begin{aligned}
[(U-\alpha)^2 + (V-\beta)^2] \cdot \Bigg[(U-\alpha)\varDelta U + (V-\beta)\varDelta V + \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \\
+ \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\Bigg] = 2(U-\alpha)^2\left[\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2\right] + 2(V-\beta)^2\left[\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right] + \\
+ 4(U-\alpha)(V-\beta)\left[\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v}\right]
\end{aligned}$$

[1] Die Anwendung des Satzes (Ia) kann vermieden werden, indem man die im Texte nur für den Mittelpunkt $x = 0$ des Kreises $|x| \leqq h$ angestellte Betrachtung mit Hilfe des Poissonschen Integrals in ähnlicher Weise für einen beliebigen inneren Punkt dieses Kreises durchführt.

[2] Da nämlich $\log R'^2_x$ stetige Ableitungen der genannten Art besitzt, so gilt das Gleiche auch für $R'^2_x = (U-\alpha)^2 + (V-\beta)^2$, ebenso aber, indem man α und β durch ein anderes zulässiges Wertsystem α', β' ersetzt, auch für $(U-\alpha')^2 + (V-\beta')^2$ und mithin (wie durch Bildung der Differenz beider Ausdrücke ersichtlich) auch für $(\alpha - \alpha')U + (\beta - \beta')V$. Durch zwei passend gewählte Ausdrücke dieser letzteren Art lassen sich aber U und V selbst homogen und linear darstellen.

oder, zusammengezogen

$$[(U-\alpha)^2+(V-\beta)^2]\,.\,[(U-\alpha)\Delta U+(V-\beta)\Delta V]=$$

$$=[(U-\alpha)^2-(V-\beta)^2]\left[\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right]+4(U-\alpha)(V-\beta)\left[\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v}\right]$$

Beide Seiten sind in Bezug auf α und β ganze rationale Funktionen; nach dem soeben über α und β bemerkten kann also die Gleichung nur dann für alle zulässigen Wertsysteme α, β erfüllt sein, wenn die Koeffizienten der nämlichen Potenzprodukte von α und β auf beiden Seiten der Gleichung einzeln übereinstimmen.

Der Vergleich der Koeffizienten von α^3 und von β^3 lehrt zunächst, dass

$$\Delta U=0 \quad \text{und} \quad \Delta V=0$$

sein muss, sodass beide Seiten der obigen Gleichung einzeln verschwinden. Die Nullsetzung der Koeffizienten von α^2 und von $\alpha\beta$ auf der rechten Seite liefert sodann die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2=0$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial v}=0,$$

welche durch Kombination

$$\left(\frac{\partial U}{\partial u}+i\,\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial v}+i\,\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2=0$$

ergeben. Hieraus folgt

$$\frac{\partial U}{\partial u}+i\,\frac{\partial V}{\partial u}=\mp i\left(\frac{\partial U}{\partial v}+i\,\frac{\partial V}{\partial v}\right),$$

sodass für einen beliebigen, der Bedingung $|x|<h$ genügenden Wert von x das Gleichungspaar

$$(4) \qquad \frac{\partial U}{\partial u}=\pm\frac{\partial V}{\partial v}, \qquad \frac{\partial V}{\partial u}=\mp\frac{\partial U}{\partial v}$$

entweder mit den beiden oberen oder mit den beiden unteren Vorzeichen erfüllt sein muss. [1]

[1] In beiden Fällen zeigen sich in der Tat die für R'_x geltenden Bedingungen befriedigt; die hier noch verbleibende Unbestimmtheit ist also keineswegs auf eine unvollständige Ausnutzung jener Bedingungen zurückzuführen.

Es soll nun der Nachweis geführt werden, dass für jeden der betrachteten Werte von x oder, worauf es hier nur ankommt, wenigstens für alle Werte x von hinlänglich kleinem absoluten Betrage die *oberen* Vorzeichen gelten müssen. Zu diesem Zwecke werde $f(x, y)$ für einen Augenblick als Funktion der beiden unabhängigen Variabeln x und $z = x + y$ angesehen, und als solche mit $f(x, z)$ bezeichnet. Wird alsdann eine positive Zahl σ kleiner als jede der beiden Zahlen ϱ und ϱ' gewählt und setzt man ferner $\sigma' = \varrho' - \sigma$, so ist, da die Ungleichungen $|x| < \sigma$, $|z| < \sigma'$ das Bestehen der Ungleichungen $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ zur Folge haben, $f(x, z)$ im Gebiete $|x| < \sigma$, $|z| < \sigma'$ eindeutig und es sind nur diejenigen Stellen dieses Gebietes für $f(x, z)$ singuläre, zwischen deren Koordinaten x und z die Relation $z = x + \varphi(x)$ besteht. Da die Funktion $x + \varphi(x)$ für $|x| < \sigma$ stetig ist und sich für $x = 0$ auf null reduziert, so kann man überdies eine positive Zahl σ_0 unterhalb σ derart angeben, dass $|x + \varphi(x)| < \sigma'$, solange $|x| < \sigma_0$.

Für die Funktion $f(x, z)$ sind alsdann im Gebiete $|x| < \sigma_0$, $|z| < \sigma'$ die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sämtlich erfüllt, und zwar werden die in diesem Gebiete gelegenen singulären Stellen dargestellt durch die Beziehung

$$z = x + \varphi(x) = u + U + i(v + V).$$

Nach dem bisher Bewiesenen muss daher für einen beliebigen Wert von x, dessen absoluter Betrag unterhalb einer gewissen Grösse h_0 liegt (die wir sogleich kleiner als h annehmen wollen), das Gleichungspaar

$$(5) \qquad \frac{\partial(u+U)}{\partial u} = \pm \frac{\partial(v+V)}{\partial v}, \qquad \frac{\partial(v+V)}{\partial u} = \mp \frac{\partial(u+U)}{\partial v}$$

entweder mit den oberen oder mit den unteren Vorzeichen erfüllt sein.

Im ersteren Falle hat man für den betrachteten Wert von x

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial v}, \qquad \frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{\partial U}{\partial v},$$

wie es behauptet wurde.

Im zweiten Falle zeigt die sich ergebende Gleichung

$$2 + \frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial v}$$

unmittelbar die Unmöglichkeit der Beziehung $\frac{\partial U}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial v}$, sodass auch in diesem Falle die Gleichungen (4) notwendig mit den oberen Vorzeichen gelten müssen.[1]

[1] Dieser zweite Fall kann, wie sich dann unmittelbar ergibt, überhaupt nur für solche x eintreten, für welche die in den Gleichungen (5) auftretenden partiellen Ableitungen sämtlich null sind.

Demnach gelten für alle der Bedingung $|x| < h_0$ genügenden Werte von x die Gleichungen (4) mit den oberen Vorzeichen; da überdies die in diesen Gleichungen vorkommenden partiellen Ableitungen für $|x| < h$ sämtlich stetig sind, so ist $\varphi(x) = U + iV$ eine für $|x| < h_0$ reguläre analytische Funktion von x.

§ 3.

Für den Fortgang der Untersuchungen erweist sich der folgende Hilfssatz [1] von Bedeutung.

Für einen gewissen Zweig [2] $f(x, y)$ *einer analytischen Funktion von* x *und* y *sei die Stelle* $x = 0$, $y = 0$ *eine singuläre; hingegen seien in einer gewissen Nachbarschaft derselben alle übrigen Stellen, deren* x*-Koordinaten null sind, für jede Bestimmung von* $f(x, y)$ *reguläre. Bedeutet alsdann* $f_0(x, y)$ *irgend eine dieser Bestimmungen, so lässt sich nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Zahl* ε *stets eine zweite,* δ, *angeben, so beschaffen, dass zu* **jedem** *Punkte* $x = x_0$ *des Kreises* $|x| < \delta$ *mindestens eine singuläre Stelle* (x_0, y_0) *von* $f_0(x, y)$ *gehört, welche der Bedingung* $|y_0| < \varepsilon$ *genügt.*

Beweis. Nach Voraussetzung verhält sich $f_0(x, y)$ sicher in der Umgebung jeder Stelle $(0, y)$ regulär, für welche y einem gewissen Gebiete $0 < |y| < \bar{k}$ angehört. Eine positive Grösse $2k$ möge nun kleiner als $\bar{k}$ wie auch kleiner als die vorgeschriebene Zahl ε gewählt werden. Wir lassen alsdann, während der reelle Parameter ϑ sich stetig von 0 bis 2π bewegt, das Argumentenpaar (x, y) die Wertsysteme $(0, ke^{i\vartheta})$ durchlaufen und unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $f_0(x, y)$ bei einer analytischen Fortsetzung längs dieses Weges in das ursprüngliche Funktionenelement zurückkehrt oder nicht.

Im *ersten Falle* ist $f_0(x, y)$ im ganzen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus den Umgebungen aller Stellen $(0, y)$ $(|y| = k)$ besteht, und es existiert mithin [3]

[1] Denselben habe ich für den Fall *eindeutiger* Funktionszweige in etwas allgemeinerer Form bereits in der Abhandlung »Einige Folgerungen aus der CAUCHY'schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen» (Münch. Sitz.-Ber. 36 (1906) p. 223) veröffentlicht.

[2] Diese Ausdrucksweise soll (wie übrigens auch aus dem weiteren Wortlaute hervorgeht) keineswegs besagen, dass der betrachtete Funktionszweig sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ eindeutig verhalten müsse. Ist der Funktionszweig in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ *nicht* eindeutig (wobei auch Verzweigungen unendlich hoher Ordnung zugelassen werden sollen), so werden als demselben angehörig alle diejenigen (eindeutigen und regulären) Bestimmungen der Funktion angesehen, deren Gültigkeitsgebiet in jede beliebige Nähe des Punktes $x = 0$, $y = 0$ vordringt, und zu welchen man von *einer* derselben aus durch analytische Fortsetzung längs eines dem Gebiete $|x| < r$, $|y| < r$ angehörigen Weges gelangen kann, wie klein auch r gewählt werde.

[3] Die gegenteilige Annahme führt, wie leicht zu sehen, auf einen Widerspruch. (Ein *direkter* Nachweis dafür ergibt sich ganz unmittelbar durch Anwendung des sog. HEINE-BOREL'schen Theorems, Jahresber. d. D. Mathem.-Ver. II Erg. — Bd. 1908, p. 77).

eine (unterhalb k gelegene) positive Grösse δ von der Art, dass $f_0(x, y)$ im Gebiete $|x| < \delta$, $k - \delta < |y| < k + \delta$ ebenfalls noch durchweg eindeutig und regulär ist. $f_0(x, y)$ gestattet infolgedessen eine im letztgenannten Gebiete gültige Darstellung durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von x und nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Doppelreihe, welche wir uns nach Potenzen von y geordnet denken wollen:

$$(1) \qquad f_0(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x)\, y^\nu \qquad (|x| < \delta,\ k - \delta < |y| < k + \delta),$$

wobei die $\mathfrak{P}_\nu(x)$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ Reihen bedeuten, welche nach positiven Potenzen von x fortschreiten. Diejenigen unter diesen Potenzreihen, deren Index ν negativ ist, können nicht alle identisch verschwinden, da unter dieser Annahme $f_0(x, y)$ im vollen Gebiete $|x| < \delta$, $|y| < k + \delta$ eindeutig und regulär wäre, also dem betrachteten Funktionszweig $f(x, y)$ überhaupt nicht angehören könnte.

Von der soeben bestimmten Grösse δ lässt sich nun leicht einsehen, dass sie zugleich die in der Behauptung ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Genügt nämlich x_0 der Bedingung $|x_0| < \delta$ und wäre entgegen der Behauptung $f_0(x, y)$ auch noch in der Umgebung jedes Punktes (x_0, y) $(|y| < \varepsilon)$, speziell also jedes Punktes (x_0, y) $(|y| \leq 2k)$ regulär, so müsste[1] $f_0(x, y)$ auch in einem gewissen Gebiete $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < 2k$ eindeutig und regulär und daher durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende Doppelreihe darstellbar sein. Wird diese letztere ebenfalls nach Potenzen von y geordnet:

$$(2) \qquad f_0(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x - x_0)\, y^\nu \qquad (|x - x_0| < \varrho_0,\ |y| < 2k)$$

so ergibt der Vergleich der beiden Darstellungen (1) und (2), dass alsdann für alle x, welche den beiden Kreisflächen $|x| < \delta$, $|x - x_0| < \varrho_0$ gemein sind,

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x - x_0) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sowie

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = -1, -2, \ldots)$$

gelten müsste, welch letzteres jedoch mit dem oben Festgestellten im Widerspruch steht.

Im *zweiten Falle* existiert,[1] da $f_0(x, y)$ bei der Fortsetzung längs des oben betrachteten Weges für eine gewisse Umgebung $|x| < \varrho_\vartheta$, $|y - ke^{i\vartheta}| < \varrho'_\vartheta$ jedes einzelnen Punktes $(0, ke^{i\vartheta})$ $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$ desselben regulär ist (wenn auch die beiden für $\vartheta = 0$ und für $\vartheta = 2\pi$ gültigen Funktionenelemente hier von einander verschie-

[1] Wie p. 68 Fussnote 3.

den sind), ebenfalls eine positive Grösse δ von der Eigenschaft, dass die sämtlichen Zahlen $\varrho_\vartheta\,(0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi)$ grösser als δ angenommen werden können. Die so bestimmte Grösse δ besitzt dann wiederum die in der Behauptung ausgesprochene Eigenschaft. Es bezeichne nämlich $\mathfrak{P}(x, y-k)$ das zu $\vartheta = 0$, $\overline{\mathfrak{P}}(x, y-k)$ das zu $\vartheta = 2\pi$ gehörige Funktionenelement, und x_0 wieder einen der Bedingung $|x_0| < \delta$ genügenden Wert. Wäre nun entgegen der Behauptung $f_0(x, y)$ in einem gewissen Gebiete $|x - x_0| < \varrho_0$, $|y| < 2k$ regulär (vgl. oben), also in diesem Gebiete durch eine nach positiven Potenzen von $x - x_0$ und y fortschreitende Doppelreihe $\mathfrak{P}_0(x - x_0, y)$ darstellbar, so müsste das zu einem beliebigen (der Bedingung $0 < \vartheta < 2\pi$ genügenden) Werte von ϑ gehörige Funktionenelement mit $\mathfrak{P}_0(x - x_0, y)$ im gemeinsamen Gültigkeitsgebiete [1] dem Werte nach übereinstimmen. Speziell müsste dies also sowohl von $\mathfrak{P}(x, y-k)$ als auch von $\overline{\mathfrak{P}}(x, y-k)$ gelten, welche demnach entgegen der gemachten Annahme mit einander identisch sein müssten.

Der vorstehende Satz behält seine Gültigkeit unverändert bei, wenn an Stelle der Veränderlichen x beliebig viele Veränderliche $x, x', \ldots$ treten. Von dieser Verallgemeinerung des Satzes wird im § 6 Gebrauch gemacht werden.

§ 4.

Der soeben bewiesene Hilfssatz kann dazu dienen, dem Satze des § 2 eine beträchtlich allgemeinere Fassung zu geben; er gestattet es nämlich, die Voraussetzungen desselben nach drei verschiedenen Richtungen zu erweitern: Erstens erweist sich die bezüglich der *Eindeutigkeit* des betrachteten Funktionszweiges $f(x, y)$ gemachte Voraussetzung als überflüssig; zweitens reicht es bereits hin, wenn zu jedem dem Gebiete $|\xi| < \varrho$ angehörigen Werte ξ die Existenz *höchstens* einer (statt genau einer) singulären Stelle (ξ, η) $(|\eta| < \varrho')$ vorausgesetzt wird und drittens endlich kann auf die Voraussetzung betreffend die *Stetigkeit der Funktion* $\varphi(\xi)$ verzichtet werden. Infolgedessen lässt sich jener Satz nunmehr in der folgenden Weise formulieren.

Es sei $x = 0$, $y = 0$ eine singuläre Stelle für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen [2]) Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y, und die Gesamtheit aller in einer gewissen Umgebung $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho'$ derselben gelegenen singulären Stellen (ξ, η) von $f(x, y)$ sei so beschaffen, dass zu jedem Werte ξ höchstens **eine** *dieser Gesamtheit angehörende singuläre Stelle (ξ, η) existiere. Alsdann gibt es zu* **jedem** *in der Umgebung von $x = 0$ gelegenen Werte $x = \xi$ eine Stelle $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$*

[1] Dasselbe enthält jedesmal zum mindesten eine gewisse Umgebung des Punktes $(x_0, k e^{i\vartheta})$.

[2] Vgl. p. 68 Fussnote [2].

jener Gesamtheit, und es stellt $\eta = \varphi(\xi)$ *eine für* $\xi = 0$ *reguläre analytische Funktion von* ξ *dar.*

Beweis. Es bedeute (ähnlich wie im vorigen Paragraphen) $f_0(x, y)$ eine beliebige Bestimmung des in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ betrachteten Funktionszweiges $f(x, y)$. Da für diesen letzteren die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt sind, so lässt sich alsdann zunächst eine positive Grösse ϱ_0 angeben, so beschaffen, dass zu jedem Punkte $x = \xi$ des Kreises $|x| < \varrho_0$ *mindestens eine* singuläre Stelle (ξ, η) von $f_0(x, y)$ gehört, welche der Bedingung $|\eta| < \varrho'$ genügt. Wird dabei, wie wir annehmen wollen, ϱ_0 zugleich kleiner als ϱ gewählt, so gibt es andererseits nach Voraussetzung zu jedem derartigen Werte von ξ *höchstens eine* singuläre Stelle (ξ, η) der eben bezeichneten Art. Daraus geht hervor, dass für $f_0(x, y)$ zu jedem der Bedingung $|\xi| < \varrho_0$ genügenden Werte von ξ *eine und nur eine* singuläre Stelle $(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi))$ jener Art existiert. [1]

Wird nun ferner eine beliebig kleine positive Zahl ε vorgeschrieben — die wir uns jedoch von vornherein kleiner als ϱ' gewählt denken —, so gibt es nach dem Hilfssatze eine zweite, δ, so beschaffen, dass zu jedem Punkte $x = x_0$ des Kreises $|x| < \delta$ mindestens eine singuläre Stelle (x_0, y_0) von $f_0(x, y)$ gehört, welche der Bedingung $|y_0| < \varepsilon$ genügt; denkt man sich dabei δ zugleich kleiner als ϱ_0 fixiert, so besagt dies, dass $|\varphi(\xi)| < \varepsilon$ ist, solange nur $|\xi| < \delta$ bleibt, und es ist demnach die Funktion $\varphi(\xi)$ für $\xi = 0$ stetig.

Bedeutet ferner $\xi = \xi_0$ einen beliebigen, der Bedingung $|\xi_0| < \varrho_0$ genügenden Wert, und setzt man $\varphi(\xi_0) = \eta_0$, so sind für die singuläre Stelle (ξ_0, η_0) des Funktionszweiges $f(x, y)$ ganz analoge Voraussetzungen erfüllt, wie sie unser Satz bezüglich der Stelle $(0, 0)$ ausspricht. Nach dem soeben bewiesenen muss demnach die Funktion $\varphi(\xi)$ auch für $\xi = \xi_0$, allgemein also im Gebiete $|\xi| < \varrho_0$ stetig sein.

Hieran knüpft sich nun schliesslich der Nachweis, dass $\eta = \varphi(\xi)$ eine für $\xi = 0$ reguläre analytische Funktion von ξ sein müsse. Dieser Nachweis ist mit dem in § 2 geführten Beweise völlig übereinstimmend; man hat in diesem letzteren lediglich ϱ durchweg durch ϱ_0, sowie $f(x, y)$ durch $f_0(x, y)$ zu ersetzen und am Schlusse eine sehr geringfügige Abänderung des Wortlautes vorzunehmen. [2]

---

[1] Da es nach Voraussetzung für den Funktionszweig $f(x, y)$ im Gebiete $|x| < \varrho_0$, $|y| < \varrho'$ überhaupt keine weiteren singulären Stellen geben kann, die soeben für die Bestimmung $f_0(x, y)$ angestellte Betrachtung jedoch in gleicher Weise auch auf jede der übrigen Bestimmungen von $f(x, y)$ anwendbar ist, so ist zugleich ersichtlich, dass die sämtlichen Bestimmungen von $f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$ genau die nämlichen singulären Stellen $(\xi, \varphi(\xi))$ besitzen müssen.

[2] Um nämlich die Entscheidung über die Vorzeichen zu treffen, wird der ganze Funktionszweig $f(x, y)$ als Funktion von x und $z = x + y$ aufgefasst und als solcher mit $f(x, z)$ bezeichnet.

§ 5.

Für den Fall beliebig vieler Veränderlichen $x, x', x'', \ldots, y$ gilt ein dem vorigen durchaus analoger Satz, nämlich:

Es sei $x = 0$, $x' = 0, \ldots, y = 0$ eine singuläre Stelle für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig $f(x, x', .., y)$ einer analytischen Funktion von $x, x', .., y$ und die Gesamtheit aller in einer gewissen Umgebung $|x| < \varrho$, $|x'| < \varrho, \ldots, |y| < \sigma$ derselben gelegenen singulären Stellen $(\xi, \xi', .., \eta)$ von $f(x, x', \ldots, y)$ sei so beschaffen, dass zu jedem Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ höchstens **eine** *dieser Gesamtheit angehörende singuläre Stelle $(\xi, \xi', .., \eta)$ existiere. Alsdann gibt es zu* **jedem** *in der Umgebung von $x = x' = \cdots = 0$ gelegenen Wertsysteme $x = \xi$, $x' = \xi', \ldots$ eine Stelle*

$$(\xi, \xi', \ldots, \eta) = (\xi, \xi', \ldots, \varphi(\xi, \xi', \ldots))$$

jener Gesamtheit und es stellt

$$\eta = \varphi(\xi, \xi', \ldots)$$

eine für $\xi = \xi' = \cdots = 0$ reguläre analytische Funktion von $\xi, \xi', \ldots$ dar.

Beweis.[1] Es bedeute $f_0(x, x', \ldots, y)$ eine beliebige Bestimmung des in der Umgebung des Punktes $x = x' = \cdots = y = 0$ betrachteten Funktionszweiges $f(x, x', .., y)$. Nach Voraussetzung verhält sich alsdann $f_0(x, x', \ldots, y)$ sicher in der Umgebung jeder Stelle $(0, 0, \ldots, 0, y)$ regulär, für welche $0 < |y| < \sigma$ ist. Wird nun die positive Grösse k der Bedingung $0 < k < \sigma$ entsprechend beliebig gewählt, und lässt man die Variablen $x, x', \ldots, y$, während der reelle Parameter ϑ sich stetig von 0 bis 2π bewegt, die Wertsysteme $(0, 0, \ldots, 0, ke^{i\vartheta})$ durchlaufen, so mögen (ähnlich wie in § 3) zwei Fälle unterschieden werden, jenachdem

---

Werden alsdann σ und σ' wiederum so bestimmt, dass die Ungleichungen $|x| < \sigma$, $|z| < \sigma'$ das Bestehen der Ungleichungen $|x| < \rho_0$, $|y| < \rho'$ zur Folge haben (während die Bestimmung von σ_0 hier unnötig ist), so sind für $\bar{f}(x, z)$ im Gebiete $|x| < \sigma$, $|z| < \sigma'$ die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes sämtlich erfüllt usw.

[1] Der Gedankengang desselben ist — wenn man von der durch Hinzufügung des Wortes »höchstens« bedingten geringfügigen Komplizierung absieht — im wesentlichen folgender: Bedeutet $(\xi, \xi', .., \eta)$ irgend eine jener singulären Stellen, so betrachte man die Funktion $f(x, \xi', \xi'', \ldots y)$ der beiden Veränderlichen x und y. Für diese braucht die Stelle $x = \xi$, $y = \eta$ nicht unter allen Umständen eine singuläre zu sein. Nehmen wir aber zunächst an, dass dies im vorliegenden Falle allgemein zutreffe, so muss nach § 4 η für jenes Wertsystem ξ', $\xi'', \ldots$ eine reguläre analytische Funktion von ξ sein, ebenso für ein beliebiges Wertsystem $\xi, \xi'', \xi''', \ldots$ eine reguläre analytische Funktion von ξ' usf., infolgedessen aber auch eine reguläre analytische Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen $\xi, \xi', \ldots$ Ist aber die oben gemachte Annahme *nicht* zutreffend, so lässt sich ihre Gültigkeit doch stets erzwingen, indem man anstelle von $x, x', \ldots$ durch eine geeignete homogene lineare Substitution neue Veränderliche einführt.

$f_0(x, x', \ldots, y)$ bei einer analytischen Fortsetzung längs dieses Weges in das ursprüngliche Funktionenelement zurückkehrt oder nicht.

Im *ersten Falle* ist $f_0(x, x' \ldots, y)$ in dem ganzen Gebiete eindeutig und regulär, welches aus den Umgebungen aller Stellen $(0, 0, \ldots, 0, y)$ $(|y| = k)$ besteht und somit [1] auch im Gebiete

$$(1) \qquad |x| < \delta, \ |x'| < \delta, \ \ldots, \ k - \delta < |y| < k + \delta$$

wo δ eine gewisse positive Zahl bedeutet, die wir uns jedoch von vornherein kleiner als ϱ gewählt denken. $f_0(x, x', \ldots, y)$ gestattet alsdann eine im letztgenannten Gebiete gültige Darstellung durch eine absolut konvergierende, nach positiven Potenzen von $x, x', \ldots$ und nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe, welche wir uns nach Potenzen von y geordnet denken wollen:

$$(2) \qquad f_0(x, x', \ldots, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x, x', \ldots) y^\nu .$$

Diejenigen unter den Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x, x', \ldots)$, deren Index ν negativ ist, können dabei nicht sämtlich identisch verschwinden, da unter dieser Annahme $f_0(x, x', \ldots, y)$ im vollen Gebiete $|x| < \delta$, $|x'| < \delta$, $\ldots$, $|y| < k + \delta$ eindeutig und regulär wäre, also dem betrachteten Funktionszweige $f(x, x', \ldots, y)$ überhaupt nicht angehören könnte. Es möge also etwa $\mathfrak{P}(x, x', \ldots)$ irgend eine unter jenen Potenzreihen bezeichnen, welche nicht identisch verschwindet.

Es ist alsdann ein Leichtes, anstelle von $x, x' \ldots$ ebensoviele neue Veränderliche $X, X', \ldots$ einzuführen, welche mit jenen durch ein System homogener linearer Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= c_{00} X + c_{01} X' + \cdots \\ x' &= c_{10} X + c_{11} X' + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

von nichtverschwindender Determinante $|c_{\varkappa\lambda}|$ verknüpft sind, derart dass, wenn man die aus $\mathfrak{P}(x, x', \ldots)$ vermöge dieser Substitution hervorgehende Reihe mit $\overline{\mathfrak{P}}(X, X', \ldots)$ bezeichnet, von den Funktionen

$$\overline{\mathfrak{P}}(X, 0, 0, \ldots), \ \ \mathfrak{P}(0, X', 0, \ldots), \ \ldots$$

ebenfalls keine identisch verschwindet.[2] Die aus $f(x, x', \ldots, y)$ bzw. $f_0(x, x', \ldots, y)$

[1] Vgl. p. 68, Fussn. [3].

[2] Vgl. Weierstrass, Abhandl. a. d. Funktionenlehre, p. 113 = Werke II, p. 140. (Es wird dort allerdings nur für die Erfüllung der *ersten* jener Bedingungen gesorgt.) Sollte bereits die ursprüngliche Potenzreihe $\mathfrak{P}(x, x' \ldots)$ die hier geforderte Eigenschaft besitzen, was z. B. stets der Fall ist, wenn $\mathfrak{P}(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$ ist, so erübrigt sich selbstredend die Vornahme einer linearen Substitution.

vermöge dieser Substitution hervorgehenden Ausdrücke mögen mit $F(X, X', \dots, y)$ bzw. $F_0(X, X', \dots, y)$ bezeichnet werden.

Es werde nun, was stets möglich ist, eine positive Grösse $\bar{\delta}$ den beiden folgenden Bedingungen entsprechend gewählt: Erstens soll $\bar{\mathfrak{P}}(X, X', \dots)$ niemals identisch verschwinden, wenn irgend *eine* der Veränderlichen $X, X', \dots$ variabel gelassen und den übrigen irgend welche feste, dem absoluten Betrage nach unterhalb $\bar{\delta}$ gelegene Werte beigelegt werden; und zweitens sollen, solange die absoluten Beträge von $X, X', \dots$ kleiner als $\bar{\delta}$ bleiben, die absoluten Beträge der zugehörigen Werte von $x, x', \dots$ stets unterhalb δ gelegen sein.

Allgemein geht alsdann aus jeder der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x, x', \dots)$ durch die obige Substitution eine mindestens für $|X| < \bar{\delta}$, $|X'| < \bar{\delta}, \dots$ eindeutige und reguläre Funktion $\bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots)$ hervor, [1] und aus der im Gebiete (1) gültigen Darstellung (2) ergibt sich daher unmittelbar die folgende:

$$F_0(X, X', \dots, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots)\, y^\nu \tag{3}$$

$$(|X| < \bar{\delta},\ |X'| < \bar{\delta}, \dots,\ k - \delta < |y| < k + \delta).$$

Unter den Funktionen $\bar{\mathfrak{P}}_\nu(X, X', \dots)$ mit negativem Index ν befindet sich dabei eine, welche mit $\bar{\mathfrak{P}}(X, X', \dots)$ identisch ist.

Es werde nun den Variablen $X', X'', \dots$ ein System von Werten $\Xi', \Xi'', \dots$ beigelegt, welche dem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als $\bar{\delta}$ sind. Da alsdann $\bar{\mathfrak{P}}(X, \Xi', \Xi'', \dots)$ nicht identisch verschwindet, so folgt aus der Darstellung (3) unmittelbar, [2] dass die Funktion $F_0(X, \Xi', \Xi'', \dots, y)$ der beiden Veränderlichen X und y zu jedem Werte $X = \Xi$ des Gebietes $|X| < \bar{\delta}$ mindestens eine der Bedingung $|\eta| \leq k - \delta$ (also auch der Bedingung $|\eta| < \sigma$) genügende singuläre Stelle $X = \Xi$, $y = \eta$ besitzen muss. Dann ist aber gleichzeitig die Stelle $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$ für die Funktion $F(X, X', \dots, y)$ eine singuläre. [3]

[1] Dieselbe kann demnach auch wieder als eine für $|X| < \bar{\delta}$, $|X'| < \bar{\delta}, \dots$ absolut konvergierende, nach Potenzen von $X, X', \dots$ fortschreitende Reihe aufgefasst werden, worauf es jedoch im folgenden nicht ankommt.

[2] Die betreffende Schlussweise findet man überdies auf p. 69 (Zeile 14 ff.) in extenso dargestellt.

[3] Nach Voraussetzung gibt es nämlich für $F(X, X' \dots, y)$ höchstens *eine* der Bedingung $|\bar{\eta}| < \sigma$ genügende singuläre Stelle $(\Xi, \Xi', \dots, \bar{\eta})$. Man verbinde also irgend einen Punkt des Gebietes $k - \delta < |y| < k + \delta$ mit dem Punkte η (des Textes) durch ein beliebiges Kurvenstück, welches ganz im Gebiete $|y| < k + \delta$ verläuft und den Punkt $\bar{\eta}$, falls ein solcher existiert, keinesfalls als *Zwischen*punkt enthält. $F_0(X, X', \dots, y)$ lässt sich dann längs des Weges, der sich ergibt, wenn $X, X', \dots$ beständig gleich $\Xi, \Xi', \dots$ bleiben, und y jenes Kurvenstück zurücklegt, sicherlich regulär fortsetzen, solange der Endpunkt $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$ dieses Weges noch nicht erreicht ist, besitzt jedoch in diesem Endpunkte selbst eine singuläre Stelle, da längs des ganzen Weges $F_0(X, X', \dots, y)$ bei der Spezialisierung $X' = \Xi'$, $X'' = \Xi'', \dots$ in den im Text betrachteten Funktionszweig $F_0(X, \Xi', \Xi'', \dots, y)$ übergeht. Die Stelle $(\Xi, \Xi', \dots, \eta)$ ist also für $F_0(X, X', \dots, y)$ eine singuläre (und somit $\bar{\eta} = \eta$).

Es existiert demnach tatsächlich zu jedem System von Werten $\Xi, \Xi', \ldots$, deren absolute Beträge unterhalb δ gelegen sind, eine (und zugleich nach Voraussetzung *nur* eine) der Bedingung $|\eta| < \sigma$ genügende singuläre Stelle $(\Xi, \Xi', \ldots, \eta)$ der Funktion $F(X, X', \ldots, y)$. Die so definierte eindeutige Funktion η von $\Xi, \Xi', \ldots$ werde mit $\eta = \Phi(\Xi, \Xi', \ldots)$ bezeichnet. Da aber, wie die vorige Betrachtung ergab, die Stelle $X = \Xi$, $y = \Phi(\Xi, \Xi', \ldots)$ zugleich eine singuläre für die Funktion $F(X, \Xi', \Xi'', \ldots, y)$ der beiden Veränderlichen X und y ist, und zwar die einzige, welche den Bedingungen $X = \Xi$ und $|y| < \sigma$ genügt,[1] so stellt, jedesmal wenn den Grössen $\Xi', \Xi'', \ldots$ irgend welche bestimmte, dem absoluten Betrage nach unterhalb δ befindliche Werte beigelegt werden, $\Phi(X, \Xi', \Xi'', \ldots)$ nach § 4 eine für $|X| < \delta$ reguläre analytische Funktion von X dar. Das Analoge gilt natürlich auch inbezug auf irgend eine der übrigen Veränderlichen $X', X'', \ldots$ und da überdies der absolute Betrag der Funktion $\Phi(X, X', \ldots)$ im betrachteten Gebiete beständig unterhalb σ bleibt, so ist nach einem Satze des Herrn Osgood[2] $\Phi(X, X', \ldots)$ eine für $|X| < \delta$, $|X'| < \delta, \ldots$, speziell also im Punkte $X = X' = \cdots = 0$ reguläre analytische Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen $X, X', \ldots$ Ebenso ist infolgedessen die vermöge der obigen linearen Substitution aus $\Phi(X, X', \ldots)$ hervorgehende Funktion $\varphi(x, x', \ldots)$ eine im entsprechenden Punkte $x = x' = \cdots = 0$ reguläre analytische Funktion der Veränderlichen $x, x', \ldots$

Im *zweiten Falle* existiert, da $f_0(x, x', \ldots, y)$ bei der Fortsetzung längs des oben betrachteten Weges für eine gewisse Umgebung $|x| < \varrho_\vartheta$, $|x'| < \varrho_\vartheta, \ldots$, $|y - ke^{i\vartheta}| < \sigma_\vartheta$ jedes einzelnen Punktes $(0, 0, \ldots, 0, ke^{i\vartheta})$ $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$ desselben regulär ist, eine positive Grösse δ von der Eigenschaft, dass sämtliche Zahlen ϱ_ϑ und σ_ϑ $(0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$ grösser als δ angenommen werden können. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{P}_1(x, x', \ldots, y - k)$ das zu $\vartheta = 0$, mit $\mathfrak{P}_2(x, x', \ldots, y - k)$ das zu $\vartheta = 2\pi$ gehörige Funktionenelement und mit

$$\mathfrak{P}_0(x, x', \ldots, y - k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x, x', \ldots)(y - k)^\nu \quad (|x| < \delta,\ |x'| < \delta, \ldots,\ |y - k| < \delta)$$

die (nach Annahme nicht identisch verschwindende) Differenz beider, so muss es unter den Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(x, x', \ldots)$ mindestens eine, $\mathfrak{P}(x, x', \ldots)$, geben, welche nicht identisch verschwindet. Verfährt man alsdann mit dieser letzteren ganz analog wie im ersten Falle mit der ebenso bezeichneten Potenzreihe, so gelangt man in leicht zu übersehender Weise[3] zu dem nämlichen Ergebnisse.

[1] Wäre $X = \Xi$, $y = \bar{\eta}$ eine weitere solche, so besässe $F(X, X', \ldots, y)$ entgegen der Voraussetzung noch die weitere singuläre Stelle $(\Xi, \Xi', \ldots, \bar{\eta})$.

[2] »Note über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen.« Math. Ann. 52 (1899), p. 462.

[3] Vgl. a. den zweiten Fall im Beweise des § 3.

§ 6.

Wir kehren zunächst wieder zum Falle zweier Veränderlichen x und y zurück, nehmen aber nunmehr an, dass in der Umgebung der betrachteten Stelle zu jedem Werte von x nicht *eine*, sondern *mehrere* singuläre Stellen existieren. Es gilt alsdann der folgende Satz:

Es seien ϱ und σ zwei positive Zahlen. Für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig $f(x, y)$ einer analytischen Funktion von x und y mögen zu jedem der Bedingung $0 < |x| < \varrho$ genügenden Werte $x = \xi$ genau r singuläre Stellen (ξ, η_1), $(\xi, \eta_2), \ldots, (\xi, \eta_r)$ existieren, deren y-Koordinaten der Kreisfläche $|y| < \sigma$ angehören. Alsdann sind die r elementaren symmetrischen Funktionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ analytische, für $|\xi| < \varrho$ reguläre Funktionen von ξ.

Ist des weiteren die Stelle $x = 0$, $y = 0$ selbst eine singuläre für jenen Funktionszweig, und zwar die einzige, deren x-Koordinate gleich null und deren y-Koordinate dem absoluten Betrage nach kleiner als σ ist, so reduzieren sich jene symmetrischen Funktionen für $\xi = 0$ sämtlich auf null. [1]

Beweis. Es sei ξ_0 irgend ein der Bedingung $0 < |\xi_0| < \varrho$ genügender Wert, und $(\xi_0, \eta_1^0), \ldots, (\xi_0, \eta_r^0)$ seien die r zugehörigen singulären Stellen. Eine positive Zahl ε möge kleiner als jede der Grössen $\frac{1}{2}|\eta_\alpha^0 - \eta_\beta^0|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha \gtrless \beta)$ und zugleich kleiner als jede der Grössen $\sigma - |\eta_\alpha^0|$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ gewählt werden. Nach § 3 gibt es alsdann eine positive Zahl δ, welche wir uns von vornherein kleiner als $|\xi_0|$ und als $\varrho - |\xi_0|$ gewählt denken, und welche so beschaffen ist, dass zu jedem der Bedingung $|\xi - \xi_0| < \delta$ genügenden Werte ξ mindestens eine singuläre Stelle (ξ, η) des Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung $|\eta - \eta_1^0| < \varepsilon$ genügt, des weiteren mindestens eine, welche der Bedingung $|\eta - \eta_2^0| < \varepsilon$ genügt, usf. Es kann aber auch nicht mehr als jedesmal *eine* solche singuläre Stelle vorhanden sein, da andernfalls die Gesamtzahl der singulären Stellen, deren x-Koordinate gleich ξ und deren y-Koordinate dem absoluten Betrage nach kleiner als σ ist, entgegen der Voraussetzung grösser als r ausfallen würde. Jede der r singulären Stellen $(\xi_0, \eta_1^0), \ldots, (\xi_0, \eta_r^0)$ genügt somit den Voraussetzungen des im § 4 bewiesenen Satzes und es sind daher $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ sämtlich Funktionen von ξ, welche für $\xi = \xi_0$ regulär sind. Jede elementare symmetrische Funktion $S(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ ist daher eine Funktion von ξ, welche für $0 < |\xi| < \varrho$ eindeutig definiert und regulär ist; da überdies beständig $|\eta_\alpha| < \sigma$

[1] Anstelle der Kreisfläche $|y| < \sigma$ kann auch ein völlig beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet der y-Ebene treten (welches jedoch, wenn der Schlusspassus des Satzes in entsprechender Weise gültig bleiben soll, selbstredend den Punkt $y = 0$ enthalten muss).

für $0 < |\xi| < \varrho$, so bleibt auch $|S(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)|$ für $0 < |\xi| < \varrho$ unterhalb einer endlichen Schranke, sodass $S(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ auch für $\xi = 0$ selbst noch regulär sein muss.

Um sich endlich von der Richtigkeit des Schlusspassus der Behauptung zu überzeugen, bezeichne man die elementaren symmetrischen Funktionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ der Reihe nach mit

$$S_1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r) = T_1(\xi), \quad \ldots, \quad S_r(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r) = T_r(\xi).$$

Für jedes der Bedingung $0 < |\xi| < \varrho$ genügende ξ liefern alsdann die r Wurzeln $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ der algebraischen Gleichung

$$\eta^r - T_1(\xi)\eta^{r-1} + \cdots + (-1)^r T_r(\xi) = 0,$$

deren Koeffizienten $T_1(\xi)$, $T_2(\xi)$, ... sämtlich für $|\xi| < \varrho$ regulär sind, die r zugehörigen singulären Stellen $(\xi, \eta_1), \ldots, (\xi, \eta_r)$. Da aber Häufungsstellen von singulären Stellen stets selbst wieder singuläre Stellen sind, so muss auch noch für $\xi = 0$ jede Wurzel η der Gleichung eine singuläre Stelle $(0, \eta)$ anzeigen, und zwar jedesmal eine solche, für welche $|\eta| < \sigma$ ist. Soll also $(0, 0)$ die einzige singuläre Stelle dieser Art sein, so muss für $\xi = 0$ jene algebraische Gleichung die r-fache Wurzel $\eta = 0$ besitzen, d. h. es muss $T_1(0) = T_2(0) = \cdots = 0$ sein.

Der vorstehende Satz lässt sich in folgender Weise auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen ausdehnen:

Es seien ϱ und σ zwei positive Zahlen. Für einen gewissen (ein- oder mehrdeutigen) Zweig $f(x, x', \ldots, y)$ einer analytischen Funktion von $x, x', \ldots, y$ mögen zu jedem der Bedingung $|\xi| < \varrho$, $|\xi'| < \varrho$, ... genügenden Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ **höchstens** *r singuläre Stellen $(\xi, \xi', \ldots, \eta_1), \ldots, (\xi, \xi', \ldots, \eta_r)$ existieren, deren y-Koordinaten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ der Kreisfläche $|y| < \sigma$ angehören. Unter den Wertsystemen $\xi, \xi', \ldots$, welche der angegebenen Bedingung genügen, möge jedoch, sobald $\xi', \xi'', \xi''', \ldots$ spezielle Werte beigelegt werden, nur eine endliche Anzahl vorhanden sein, für welche die Anzahl der zugehörigen singulären Stellen* **kleiner** *als r ausfällt; analog falls ξ, ξ'', ξ''' spezielle Werte beigelegt werden, usf. Alsdann sind die r elementaren symmetrischen Funktionen*

$$S_\alpha(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r) = T_\alpha(\xi, \xi', \ldots) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r)$$

von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ analytische, für $|\xi| < \varrho$, $|\xi'| < \varrho$, ... reguläre Funktionen von $\xi, \xi', \ldots$, und die sämtlichen im Gebiete $|x| < \varrho$, $|x'| < \varrho, \ldots, |y| < \sigma$ gelegenen singulären Stellen von $f(x, x', \ldots, y)$ werden genau dargestellt durch diejenigen Wertsysteme $(\xi, \xi', \ldots, \eta)$, welche den Bedingungen:

$$\eta^r - T_1(\xi, \xi', \ldots)\eta^{r-1} + \cdots + (-1)^r T_r(\xi, \xi', \ldots) = 0$$

$$|\xi| < \varrho, \ |\xi'| < \varrho, \ldots$$

genügen. [1]

Beweis. Es sei $|\xi_0| < \varrho$, $|\xi'_0| < \varrho, \ldots$, und zwar werde ξ_0 so gewählt, dass zum Wertsysteme $\xi_0, \xi'_0, \ldots$ genau r singuläre Stellen $(\xi_0, \xi'_0, \ldots, \eta_1^0), \ldots, (\xi_0, \xi'_0, \ldots, \eta_r^0)$ der betrachteten Art gehören. Wird alsdann eine positive Zahl ε genau wie beim vorigen Beweise bestimmt, so gibt es nach § 3 (Schlussbemerkung) eine positive Zahl δ, die wir uns von vornherein kleiner als jede der Grössen $\varrho - |\xi_0|$, $\varrho - |\xi'_0|, \ldots$ gewählt denken, und welche so beschaffen ist, dass zu jedem der Bedingung $|\bar{\xi} - \xi_0| < \delta$, $|\bar{\xi}' - \xi'_0| < \delta, \ldots$ genügenden Wertsysteme $\bar{\xi}, \bar{\xi}', \ldots$ mindestens eine singuläre Stelle $(\bar{\xi}, \bar{\xi}', \ldots, \bar{\eta})$ jenes Funktionszweiges existiert, welche der Bedingung $|\bar{\eta} - \eta_1^0| < \varepsilon$ genügt, des weiteren mindestens eine, welche der Bedingung $|\bar{\eta} - \eta_2^0| < \varepsilon$ genügt, usf. Alsdann ist wieder unmittelbar ersichtlich, dass auch nicht mehr als jedesmal *eine* derartige singuläre Stelle vorhanden sein kann. Jede der r singulären Stellen $(\xi_0, \xi'_0, \ldots, \eta_1^0), \ldots, (\xi_0, \xi'_0, \ldots, \eta_r^0)$ genügt somit den Voraussetzungen des in § 5 bewiesenen Satzes. Infolgedessen sind $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ sämtlich Funktionen von $\xi, \xi', \ldots$, welche an der Stelle $\xi = \xi_0$, $\xi' = \xi'_0, \ldots$ regulär sind, und das gleiche gilt auch von irgend einer elementaren symmetrischen Funktion $S(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r) = T(\xi, \xi', \ldots)$ von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$. Die Funktion $T(\xi, \xi'_0, \xi''_0, \ldots)$ ist somit eine im Gebiete $|\xi| < \varrho$ mit Ausschluss höchstens einer endlichen Anzahl von Stellen durchweg eindeutige und reguläre Funktion von ξ; da ihr absoluter Betrag aber überdies unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, so muss sie auch im vollen Gebiete $|\xi| < \varrho$ regulär sein. Ebenso ist $T(\xi_0, \xi', \xi''_0, \ldots)$ $(|\xi_0| < \varrho, |\xi''_0| < \varrho, \ldots)$ eine für $|\xi'| < \varrho$ reguläre Funktion von ξ' usf. Da endlich für alle betrachteten Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ der absolute Betrag von $T(\xi, \xi', \ldots)$ unterhalb einer endlichen Schranke bleibt, so muss nach dem bereits erwähnten Satze des Herrn Osgood [2] $T(\xi, \xi', \ldots)$ eine für $|\xi| < \varrho$, $|\xi'| < \varrho, \ldots$ reguläre Funktion der sämtlichen unabhängigen Veränderlichen $\xi, \xi', \ldots$ sein, w. z. b. w.

Der die Gesamtheit der singulären Stellen des Gebietes $|x| < \varrho$, $|x'| < \varrho, \ldots$, $|y| < \sigma$ betreffende Schlusspassus der Behauptung ist trivial, solange es sich dabei um Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ handelt, zu welchen genau r singuläre Stellen der betrachteten Art gehören. Für die übrigen Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ liefern, da Häufungsstellen von singulären Stellen stets selbst wieder singuläre Stellen sind,

[1] Anstelle der Kreisfläche $|y| < \sigma$ kann auch hier ein beliebiges, im Endlichen gelegenes Gebiet der y-Ebene treten.

[2] S. p. 75, Fussn. [2].

die Wurzeln η der Gleichung sicher ebenfalls singuläre Stellen $(\xi, \xi', \ldots, \eta)$, und zwar stets solche, für welche $|\eta| < \sigma$ ist; dass es aber zu einem derartigen Wertsysteme $\xi, \xi', \ldots$ nicht noch anderweitige singuläre Stellen $(\xi, \xi', \ldots, \eta)$ geben könne, welche der Bedingung $|\eta| < \sigma$ genügen, folgt, da deren Anzahl nach Voraussetzung jedenfalls eine endliche sein müsste, unmittelbar aus § 3.

München, Oktober 1907.

ÜBER DIE COSSERAT'SCHEN FUNKTIONENTRIPEL UND IHRE ANWENDUNG IN DER ELASTIZITÄTSTHEORIE.

VON

A. KORN,

in MÜNCHEN.

Das Problem des elastischen Gleichgewichts bei gegebenen Verrückungen[1] an der Grenze eines gegebenen elastischen Körpers lässt sich, wenn die Oberfläche des Körpers eine stetig gekrümmte Fläche ist, auf das folgende mathematische Problem zurückführen:

Man sucht drei in einem Gebiete τ eindeutige und stetige Funktionen u, v, w mit endlichen ersten Ableitungen, welche in dem Gebiete τ den Differentialgleichungen genügen

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v + k\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \Delta w + k\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = -\dfrac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

und an der Oberfläche ω von τ die Grenzwerte

---

[1] A. KORN, Abhandlungen zur Elasticitätstheorie I., Sitz. Ber. der K. Bayer. Akad. d. Wisssch. 36. S. 37 ff., 1906, Ann. Ec. Norm. (3) 24, p. 9 ff., 1907. Wir beschäftigen uns hier mit dem einfachsten Fall, dass keine äusseren Kräfte X, Y, Z wirken, und setzen über die gegebenen Verrückungen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ an der Grenze nicht blos Stetigkeit, sondern auch die Stetigkeit der ersten Ableitungen in solcher Weise voraus, dass für irgend zwei Punkte 1 und 2 der Oberfläche in der Entfernung r_{12}:

$$\text{abs. } |D_1 \bar{u}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{v}|_1^2, \quad \text{abs. } |D_1 \bar{w}|_1^2 \lesseqgtr \text{endl. Konst. } r_{12}^{\lambda}, \ (\lambda > 0).$$

Man vgl. auch I. FREDHOLM, Solution d'un problème fondamental de l'élasticité, Ark. för. Mat. Astr. och Fys. 2, N:o 28, 1906.

$$(2)\qquad \begin{cases} u = 0, \\ v = 0, \\ w = 0 \end{cases}$$

annehmen.

Dabei soll k eine gegebene Konstante, Θ eine harmonische Funktion des Gebietes τ sein, welche für irgend 2 Punkte 1 und 2 des Gebietes τ in der Entfernung r_{12} der Bedingung genügt:

$$(3)\qquad |\Theta_2 - \Theta_1| \overline{\overline{<}} A \cdot r_{12}^{\lambda},$$

wo A eine endliche Konstante und λ eine von Null verschiedene positive Zahl bezeichnet. Diese Funktion Θ wird als gegeben vorausgesetzt.

Das Problem (1), (2) ist stets eindeutig lösbar, wenn k eine gegebene, der Ungleichung:

$$-1 < k < +\infty$$

entsprechende Zahl vorstellt.

E. und F. Cosserat[1] haben nun zuerst den Gedanken ausgesprochen, dass das Lösungssystem u, v, w als Funktionen des Parameters k Pole für Werte von

$$k = k_j, \quad k_j < -1$$

haben kann, dass für derartige Werte von k mit ihren ersten Ableitungen in τ eindeutige und stetige Funktionen

$$U_j, \; V_j, \; W_j$$

existieren werden, welche den Bedingungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \\ &\Delta V_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, \quad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W_j}{\partial z} \\ &\Delta W_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{in } \tau, \\ \qquad \left.\begin{aligned} U_j &= 0, \\ V_j &= 0, \\ W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{an } \omega \end{cases}$$

[1] E. und F. Cosserat, Comptes Rendus, 126, p. 1089, 1898, 133, p. 145, 1901, man vgl. auch Appell, Traité de mécanique rationnelle III, p. 528 ff.

entsprechen; dass es wahrscheinlich möglich ist, jedes Lösungssystem u, v, w[1] eines Problemes von der Art (1), (2) nach den Funktionentripeln $U_j V_j W_j$ zu entwickeln:

$$
(5) \qquad \begin{cases} u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w = C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}
$$

wobei die Konstanten C_k leicht als Raumintegrale zu berechnen sind, welche mit Hilfe der gegebenen Funktion Θ aufgestellt werden können, mit Berücksichtigung der für 2 linear unabhängige Funktionentripel $U_i V_i W_i$, $U_k V_k W_k$ bestehenden Relationen:

$$
(6) \qquad \int_\tau \Theta_i \Theta_k \, d\tau = 0, \quad k_i \neq k_k.
$$

Für den Fall, dass die Oberfläche eine Kugel ist, können alle diese Behauptungen leicht verifiziert werden, es handelte sich darum, auch in dem allgemeinen Falle einer beliebigen, stetig gekrümmten Fläche ω Verallgemeinerungen dieser Behauptungen zu geben, die von E. und F. Cosserat zunächst nur in Analogie zu den Untersuchungen Poincarés über die Differentialgleichung:

$$
\Delta \varphi + k \varphi = f
$$

aufgestellt und nur in speziellen Beispielen verifiziert worden waren.

Es sei mir gestattet, im Folgenden die Funktionentripel $U_j V_j W_j$, welche mit ihren ersten Ableitungen im Gebiete τ eindeutig und stetig sind und Differentialgleichungen bzw. Grenzbedingungen von der Form (4) genügen, als Cosserat'sche Funktionentripel des Gebietes τ mit der zugehörigen Zahl k_j zu bezeichnen.

§ 1.

Wir führen in den Gleichungen (1) und (2) an Stelle der Funktionen u, v, w die 3 folgenden Funktionen u', v', w' ein:

$$
(7) \qquad \begin{cases} u' = u - \dfrac{k}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \\[2ex] v' = v - \dfrac{k}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \end{cases}
$$

[1] Bei gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über die Ableitungen der gegebenen Funktion θ.

(7)
$$\left\{ w' = w - \frac{k}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta \frac{d\tau}{r}, \right.$$

dann ist:

(8)
$$\theta' = (1 + k)\,\theta,$$

und wir können die Gleichungen (1) und (2) folgendermassen schreiben:

(9)
$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \Delta v' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \Delta w' &= -\frac{\partial \Theta}{\partial z} \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau;$$

(10)
$$\left\{ \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{4\pi} \frac{k}{1+k} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ v' &= -\frac{1}{4\pi} \frac{k}{1+k} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\ w' &= -\frac{1}{4\pi} \frac{k}{1+k} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega,$$

oder auch, wenn wir:

(11)
$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ f_2 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ f_3 &= -\frac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

(12)
$$k = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda}$$

setzen, in folgender Weise:

(13)
$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u' &= f_1, \\ \Delta v' &= f_2, \\ \Delta w' &= f_3 \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau;$$

$$
(14) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u' &= \lambda \left(u' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \right), \\
v' &= \lambda \left(v' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \right), \\
w' &= \lambda \left(w' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \right)
\end{aligned} \right\} \text{ an } \omega.
$$

Wir versuchen[1] die Lösung in folgender Weise: Wir bilden sukzessive die Funktionen $u'_j\, v'_j\, w'_j$ mit Hilfe der folgenden Bedingungen:

$$
(15) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} \varDelta u'_0 &= f_1, \\ \varDelta v'_0 &= f_2, \\ \varDelta w'_0 &= f_3, \end{aligned} \right\} \text{ in } \tau; \\
&\quad u'_0 = v'_0 = w'_0 = 0, \quad \text{an } \omega
\end{aligned} \right.
$$

$$
(16) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\varDelta u'_j = \varDelta v'_j = \varDelta w'_j = 0, \quad \text{in } \tau \\
&\left. \begin{aligned}
u'_j &= u'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\
v'_j &= v'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta'_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \\
w'_j &= w'_{j-1} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta'_{j-1} \frac{d\tau}{r}
\end{aligned} \right\} \text{ an } \omega,
\end{aligned} \right\} j = 1, 2 \ldots
$$

dann werden offenbar die Reihen:

$$
(17) \qquad \left\{ \begin{aligned}
u' &= u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \cdots, \\
v' &= v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \cdots, \\
w' &= w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \cdots
\end{aligned} \right.
$$

die Lösungen des Problems (13), (14) darstellen, wenn die Reihen mit ihren ersten Ableitungen in τ konvergent sind und eindeutige und stetige Funktionen der Stelle in τ darstellen.

[1] Man vgl. die analoge Betrachtung in meiner Abh.: Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten. Rend. Cont. del Circ. Mat. di Palermo, 1908.

In bezug auf diese Konvergenzbetrachtungen können wir nun alle Resultate aus meiner Abhandlung: Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume (Krakauer Anzeiger 1907, S. 837 ff.) übernehmen:

Die Konvergenzbeweise lassen sich in aller Strenge führen, solange λ absolut genommen kleiner als eine bestimmte endliche Zahl $|\lambda_1|$ ist, die streng genommen grösser als eins ist. In jedem Falle können wir für irgend ein $|\lambda|$, das kleiner ist, als eine beliebig gegebene positive Zahl m, eine Zahl p und $p+1$ der Gleichung

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{18}$$

genügende Konstanten

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$$

so finden, dass das Problem:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u'' &= \alpha_0 f_1, \\ \Delta v'' &= \alpha_0 f_2, \quad \text{in } \tau; \\ \Delta w'' &= \alpha_0 f_3, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} u'' &= \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \cdots + \alpha_p u'_p + \lambda\left(u'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta''\frac{d\tau}{r}\right), \\ v'' &= \alpha_0 v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_p v'_p + \lambda\left(v'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta''\frac{d\tau}{r}\right), \\ w'' &= \alpha_0 w'_0 + \alpha_1 w'_1 + \cdots + \alpha_p w'_p + \lambda\left(w'' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta''\frac{d\tau}{r}\right) \end{aligned}\right\} \text{ an } \omega \tag{20}$$

durch die Methode der sukzessiven Approximationen gelöst wird, und es ergibt sich somit, falls nicht grade λ eine Lösung der Gleichung:

$$D(\lambda) \equiv (-\lambda)^p \alpha_0 + (-\lambda)^{p-1}\alpha_1 + \cdots + (-\lambda)\alpha_{p-1} + \alpha_p = 0 \tag{21}$$

ist, dass wir die Lösungen des Problems (13), (14) für jedes

$$|\lambda| \leqq m$$

in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{U'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \quad (n \leqq p) \\ v' &= \frac{V'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \\ w' &= \frac{W'(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

darstellen können, wobei die Funktionen U', V', W' stets in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und für die Fälle:

$$\lambda = \lambda_j, \quad j = 1, 2 \ldots n$$

abgesehen von einer multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten, in sogenannte biharmonische Funktionentripel $U'_j\, V'_j\, W'_j$ übergehen, welche ich durch die Gleichungen:

$$\Delta U'_j = \Delta V'_j = \Delta W'_j = 0, \quad \text{in } \tau; \tag{23}$$

$$\left.\begin{cases} \mathfrak{U}'_j = \lambda_j \left(\mathfrak{U}'_j + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right), \\[2ex] \mathfrak{V}'_j = \lambda_j \left(\mathfrak{V}'_j + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right), \\[2ex] \mathfrak{W}'_j = \lambda_j \left(\mathfrak{W}'_j + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r} \right), \\[2ex] \mathfrak{U}'_j \cos(\nu x) + \mathfrak{V}'_j \cos(\nu y) + \mathfrak{W}'_j \cos(\nu z) = 0, \end{cases}\right\} \text{ an } \omega; \tag{24}$$

$$\int_\tau (\Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j)\, d\tau = 1 \tag{25}$$

definiert habe. Die den biharmonischen Funktionentripeln $U'_j\, V'_j\, W'_j$ zugehörigen Zahlen λ_j genügen der Gleichung:

$$D(\lambda) = 0$$

und können keine mehrfachen Wurzeln dieser Gleichung sein.

Nach der Lösung des Problems (13), (14) erhalten wir infolge der Beziehungen (7), (8), (12) als Lösung des ursprünglichen Problems (1), (2) die Funktionen:

$$\begin{cases} u = u' - \dfrac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r}, \\[2ex] v = v' - \dfrac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r}, \\[2ex] w = w' - \dfrac{2\lambda}{1-\lambda} \cdot \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r}. \end{cases} \tag{26}$$

Nur eine Bemerkung ist noch zu dieser Untersuchung nachzutragen: Bei der Lösung des Problems (13), (14) wurde (Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems, Krakauer Anz. 1907, p. 866) vorausgesetzt, dass f_1, f_2, f_3 in ganzer Erstreckung des Gebietes τ eindeutig und stetig sind und der Bedingung:

$$\Delta \int_\tau f_j \frac{d\tau}{r} = -4\pi f_j, \quad j = 1, 2, 3$$

genügen. In der Tat ist für die Giltigkeit aller dieser Resultate — wie ohne weiteres aus dem Beweise derselben hervorgeht —, hinreichend, dass die ersten Ableitungen der Funktionen u_0, v_0, w_0, welche durch die Gleichungen (15) definiert sind, von der Art stetig sind, dass für irgend 2 Punkte des Gebietes in dem Abstande r_{12}:

$$\text{abs.}\, |D_1 u_0|_1^2, \quad \text{abs.}\, |D_1 v_0|_1^2, \quad \text{abs.}\, |D_1 w_0|_1^2 \leqq \text{endl. Konst. } r_{12}^\lambda, \qquad (\lambda > 0).$$

Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn wir für f_1, f_2, f_3 die Funktionen (11) setzen und die ursprüngliche Voraussetzung (3) machen. Es ergibt sich das leicht mit Hilfe der Sätze des Kapitels I und II meiner Abhandlung: Sur les équations de l'élasticité (Ann. Ec. Norm. (3) 24, p. 12 ff., 1907).

Die Untersuchung des § 1 hat uns eine neue Lösungsmethode des Problems (1), (2) nicht bloss für den Fall:

$$|\lambda| < 1$$

also:

$$-1 < k < +\infty$$

gegeben, sondern auch für den Fall

$$|\lambda| \geqq 1$$

also

$$k \leqq -1$$

falls nicht grade λ eine Wurzel der Gleichung

$$D(\lambda) = 0$$

ist. Die Stellen

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots$$

denen biharmonische Tripelfunktionen $U'_j\, V'_j\, W'_j$ entsprechen, sind auch Pole der Lösung u, v, w (26) des ursprünglichen Problems (1), (2).

Die Pole sind sämtlich einfach und haben eine Häufungsstelle an der Stelle:

$$|\lambda| = \infty$$

[1] oder abteilungsweise eindeutig und stetig.

also an der Stelle:

$$k = -2.$$

Wie nun die Residuen der Lösungen des Problems (13), (14), abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten, an den Stellen

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots$$

in biharmonische Funktionentripel des Gebietes τ übergehen, so können wir nunmehr zeigen, dass die Residuen der Lösungen des Problems (1), (2) COSSERAT'sche Funktionentripel des Gebietes τ werden, abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten.

Wir haben hierzu nur zu zeigen, dass die Funktionen:

$$(27) \qquad \begin{cases} U_j = c_j\left[U'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \\ V_j = c_j\left[V'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \\ W_j = c_j\left[W'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \dfrac{d\tau}{r}\right], \end{cases}$$

in denen die c_j Konstanten bezeichnen, den Gleichungen genügen:

$$(28^a) \qquad \left.\begin{cases} \Delta U_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \\ \Delta V_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial y} = 0, \\ \Delta W_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial z} = 0 \end{cases}\right\} \text{ in } \tau; \quad k_j = -\frac{2\lambda_j}{1+\lambda_j}$$

$$(28^b) \qquad \left.\begin{cases} U_j = 0, \\ V_j = 0, \\ W_j = 0 \end{cases}\right\} \text{ an } \omega.$$

Es ist in der Tat:

$$\Theta_j = c_j \frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\Theta'_j$$

und daher:

$$\Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = c_j \frac{\partial \Theta'_j}{\partial x}\left\{\frac{2\lambda_j}{1-\lambda_j} + k_j \frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right\} = 0.$$

analog folgen die beiden übrigen Gleichungen (28^a); es ist ferner:

$$U'_j = \frac{2\lambda_j}{1-\lambda_j}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r}, \quad \text{an } \omega,$$

nach (27), also:

$$U_j = 0, \quad \text{an } \omega,$$

analog folgen die beiden übrigen Gleichungen (28^b).

Wir wollen die Konstanten c_j noch so wählen, dass:

$$\int\limits_\tau (\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \mathfrak{V}_j^2 + \mathfrak{W}_j^2)\, d\tau = 1 \quad \text{wird:} \tag{29}$$

es ergibt sich, wegen der Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_j &= c_j \frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\Theta'_j, \\ \mathfrak{U}_j &= c_j \mathfrak{U}'_j, \\ \mathfrak{V}_j &= c_j \mathfrak{V}'_j, \\ \mathfrak{W}_j &= c_j \mathfrak{W}'_j \end{aligned}\right. \tag{30}$$

es muss

$$c_j^2 \int\limits_\tau \left\{\left(\frac{1+\lambda_j}{1-\lambda_j}\right)^2 \Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j\right\} d\tau = 1$$

sein, und da:

$$\int\limits_\tau \Theta'^2_j\, d\tau = \frac{\lambda_j - 1}{2\lambda_j}, \quad \int\limits_\tau (\mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j)\, d\tau = \frac{\lambda_j + 1}{2\lambda_j} \tag{31}$$

so folgt:

$$c_j = \sqrt{\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} = \sqrt{-k_j - 1}\,. \tag{32}$$

I. Wenn wir die Cosserat'schen Funktionentripel des Gebietes $U_j\ V_j\ W_j$ und die denselben zugehörigen Zahlen k_j durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= 0, \\ \Delta V_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= 0, \\ \Delta W_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in } \tau: \tag{33}$$

$$(33)\qquad \begin{cases} \left.\begin{aligned} U_j &= 0, \\ V_j &= 0, \\ W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \text{an } \omega; \\ \int\limits_\tau (\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \mathfrak{V}_j^2 + \mathfrak{W}_j^2)\, d\tau = 1 \end{cases}$$

und die Bedingung definieren, dass die Funktionen in τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sein sollen, und zwar so, dass für irgend 2 Punkte des Gebietes τ, 1 und 2, in der Entfernung r_{12}, die absolute Differenz der Werte der ersten Ableitungen:

$$(34)\quad \text{abs. } |D_1 U_j|_1^2,\quad \text{abs. } |D_1 V_j|_1^2,\quad \text{abs. } |D_1 W_j|_1^2 \lesseqgtr \text{endl. Konst.}^1\, r_{12}^{\lambda}, \qquad (\lambda > 0)$$

sein soll, besteht zwischen den Cosserat'schen Funktionentripeln und den biharmonischen Funktionentripeln $U'_i\, V'_j\, W'_j$ des Gebietes τ der Zusammenhang:

$$(35)\qquad \begin{cases} U_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ U'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right\}, \\[2ex] V_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ V'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right\}, \\[2ex] W_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}} \left\{ W'_j - \dfrac{2\lambda_j}{1 - \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int\limits_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \right\}. \end{cases}$$

II. Die Lösung jedes Problems der Elastizitätstheorie von der Form (1), (2) kann bei der Bedingung (3), und wenn $|\lambda|^2$ unterhalb einer beliebigen endlichen Grenze m liegt, in der folgenden Form dargestellt werden:

$$(36)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\Phi(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}, \\[2ex] v = \dfrac{X(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}, \\[2ex] w = \dfrac{\Psi(\lambda, x, y, z)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)}; \end{cases}$$

[1] Die Konstante kann nur mit unendlich wachsendem j unendlich wachsen.

[2] $\lambda = -\dfrac{k}{2+k}$.

dabei sind die Funktionen Φ, X, Ψ mit ihren ersten Ableitungen in τ für jeden beliebigen Wert

$$|\lambda| \overline{<} m$$

eindeutig und stetig, und

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$$

stellen eine endliche Anzahl von Zahlen dar, aus der Reihe der Cosserat'schen Funktionentripeln zugehöriger Zahlen, und die Funktionen Φ, X, Ψ gehen für:

$$\lambda = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots n$$

abgesehen von multiplikativen, von Null verschiedenen Konstanten in Cosserat'sche Funktionentripel mit den zugehörigen Zahlen λ_j über.

III. Will man von den Cosserat'schen Funktionentripeln umgekehrt zu den biharmonischen Funktionentripeln zurückgehen, so hat man die Formeln zu benützen:

$$(37) \quad \begin{cases} U'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ U_j + \dfrac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \Theta_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}, \\ V'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ V_j + \dfrac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \Theta_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}, \\ W'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}} \left\{ W_j + \dfrac{2\lambda_j}{1 + \lambda_j} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \Theta_j \dfrac{d\tau}{r} \right\}; \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} \Theta'_j = -\sqrt{\dfrac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}}\, \Theta_j, \\ \mathfrak{U}'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{U}_j. \\ \mathfrak{V}'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{V}_j. \\ \mathfrak{W}'_j = \sqrt{\dfrac{\lambda_j + 1}{\lambda_j - 1}}\, \mathfrak{W}_j. \end{cases}$$

IV. Für zwei Cosserat'sche Funktionentripel

$$U_i \, V_i \, W_i \quad \text{und} \quad U_j \, V_j \, W_j$$

mit verschiedenen zugehörigen Zahlen λ und λ bestehen die Relationen:

$$\int_\tau \Theta_i \Theta_j \, d\tau = 0, \tag{39}$$

$$\int_\tau (\mathfrak{U}_i \mathfrak{U}_j + \mathfrak{V}_i \mathfrak{V}_j + \mathfrak{W}_i \mathfrak{W}_j) \, d\tau = 0. \tag{40}$$

Zusatz zu IV. Gestattet das Lösungssystem u, v, w des Problems (1), (2) die Entwickelung nach COSSERAT'schen Funktionentripeln:

$$u = \Sigma_j C_j U_j, \quad v = \Sigma_j C_j V_j, \quad w = \Sigma_j C_j W_j \tag{41}$$

so haben die Konstanten C_j dieser Entwickelung die Werte:

$$\left\{\begin{aligned} C_j &= \int_\tau (\theta \Theta_j + \mathfrak{u} \mathfrak{U}_j + \mathfrak{v} \mathfrak{V}_j + \mathfrak{w} \mathfrak{W}_j) \, d\tau, \\ &= \frac{2 \lambda_j}{1 + \lambda_j} \int_\tau \theta \Theta_j \, d\tau, \\ &= \frac{k_j}{k - k_j} \int_\tau \Theta \Theta_j \, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

§ 3.

In der Theorie des biharmonischen Problems und der biharmonischen Funktionentripel wurde gezeigt (Krakauer Anz. 1907, S. 889),[1] dass, wenn auch nicht immer die Entwickelung der Lösungen u', v', w' des Problemes (13), (14) selbst nach biharmonischen Tripelfunktionen sichergestellt ist, jedenfalls eine endliche Zahl s vorhanden ist, so, dass die Funktionen:

$$\begin{aligned} &u' - u'_0 - \lambda u'_1 - \lambda^2 u'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} u'_{s-1}, \\ &v' - v'_0 - \lambda v'_1 - \lambda^2 v'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} v'_{s-1}, \\ &w' - w'_0 - \lambda w'_1 - \lambda^2 w'_2 - \cdots - \lambda^{s-1} w'_{s-1} \end{aligned}$$

nach biharmonischen Tripeln entwickelt werden können. Es werden also jedenfalls die Entwickelungen bestehen:

[1] In den Gleichungen 128^b, l. c. ist bereits mit Rücksicht auf das dort zu behandelnde biharmonische Problem $\lambda = 1$ gesetzt.

$$(43)\qquad \begin{cases} u' = u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} u'_{s-1} + C_1 U'_1 + C_2 U'_2 + \cdots, \\ v' = v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} v'_{s-1} + C_1 V'_1 + C_2 V'_2 + \cdots, \\ w' = w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \cdots + \lambda^{s-1} w'_{s-1} + C_1 W'_1 + C_2 W'_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo die C_j Konstanten sind.

Damit erhalten wir aber auch sofort ein korrespondierendes Resultat für die Entwickelung der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) nach COSSERAT'schen Funktionentripeln:

V. Wenn auch die Entwickelung der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) selbst nach COSSERAT'schen Funktionentripeln nicht sichergestellt ist, so ist jedenfalls stets eine endliche Zahl s vorhanden, so, dass die Funktionen:

$$u - \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(u'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$v - \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(v'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right),$$

$$w - \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(w'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right)$$

in denen die Funktionen u'_j, v'_j, w'_j durch die Gleichungen (11), (15), (16) definiert sind, der Entwickelung nach COSSERAT'schen Funktionentripeln fähig sind:

$$(44)\qquad \begin{cases} u = \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(u'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v = \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(v'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w = \sum_0^{s-1}{}_j \lambda^j \left(w'_j - \frac{2\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right) + C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{cases}$$

wo die $C_1, C_2, \ldots$ Konstanten sind.

Für die Kugel ist sichergestellt, dass $s = 0$ ist (Krakauer Anz. 1907, S. 894), somit gilt für die Kugel stets die Entwickelung:

$$(45)\qquad \begin{cases} u = C_1\, U_1 + C_2\, U_2 + \cdots, \\ v = C_1\, V_1 + C_2\, V_2 + \cdots, \\ w = C_1\, W_1 + C_2\, W_2 + \cdots. \end{cases}$$

wo:

$$(46)\qquad C_j = \frac{k_j}{k - k_j} \int_\tau \Theta\, \Theta_j\, d\,\tau.$$

§ 4.

Für den Fall der Kugel habe ich die biharmonischen Funktionentripel früher angegeben (Krakauer Anz. 1907, S. 893). Denken wir uns eine Kugel vom Radius R um den Anfangspunkt als Centrum und führen wir Polarkoordinaten durch die Transformationen:

$$(47)\qquad \begin{cases} x = r_1\, \mu_1, \\ y = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2}\, \cos \varphi_1, \quad \mu_1 = \cos \theta_1 \\ z = r_1 \sqrt{1 - \mu_1^2}\, \sin \varphi_1, \end{cases}$$

ein und setzen:

$$(48)\qquad F_j(x, y, z) = r_1^j\; Y_j(\mu_1, \varphi_1),$$

wo Y_j eine allgemeine Kugelfunktion j-ter Ordnung vorstellt, dann sind die biharmonischen Funktionentripel:

$$(49)\qquad \begin{cases} U'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1)\, x\, F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial x} \right\}, \\ V'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1)\, y\, F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial y} \right\}, \quad \lambda_j = -(2j+1); \\ W'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left\{ (2j+1)\, z\, F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial z} \right\}; \end{cases}$$

α_j bezeichnet eine Konstante, welche zur Befriedigung der Bedingung

$$\int_\tau (\Theta'^2_j + \mathfrak{U}'^2_j + \mathfrak{V}'^2_j + \mathfrak{W}'^2_j)\, d\,\tau = 1$$

zu verwenden ist.

Da

$$(50)\qquad \Theta'_j = \alpha_j\, F_j$$

und

$$\frac{1}{4\pi}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j F_j}{2j+1}\left\{\frac{r_1^2}{2j+3} - \frac{1}{2}(r_1^2 - R^2)\right\}, \tag{51}$$

so ergeben sich aus (35) unmittelbar die COSSERAT'schen Funktionentripel für die Kugel:

$$\left\{\begin{aligned} U_j &= \beta_j (r_1^2 - R^2)\frac{\partial F_j}{\partial x}, \\ V_j &= \beta_j (r_1^2 - R^2)\frac{\partial F_j}{\partial y}, \\ W_j &= \beta_j (r_1^2 - R^2)\frac{\partial F_j}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{52}$$

β_j eine Konstante, die zur Befriedigung der Bedingung:

$$\int_\tau (\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \mathfrak{V}_j^2 + \mathfrak{W}_j^2)\, d\tau = 1$$

zu verwenden ist.

Die Entwickelungen der Lösungen u, v, w des Problems (1), (2) nach diesen Funktionen:

$$\left\{\begin{aligned} u &= C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots, \\ v &= C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots, \\ w &= C_1 W_1 + C_2 W_2 + \cdots, \end{aligned}\right. \tag{53}$$

wo:

$$C_j = \frac{k_j}{k - k_j}\int_\tau \Theta\,\Theta_j\, d\tau, \quad \left(k_j = -\frac{2j+1}{j}\right) \tag{54}$$

sind bereits seit langem bekannt; die in der Einleitung gemachte Voraussetzung über die Funktion Θ ist für die Reihenentwickelungen (53) und für die gliedweise einmalige Differenzierbarkeit dieser Reihen hinreichend.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES.

PAR

RENÉ BAIRE

À DIJON.

DEUXIÈME PARTIE.

Introduction.

Pour poursuivre l'étude des fonctions de classe supérieure à 1, étude qui a été commencée dans les deux derniers chapitres de la première partie de ce travail,[1] j'ai été conduit à introduire certaines notions nouvelles, que je me propose de définir et d'étudier dans cette deuxième partie. Les fonctions considérées jusqu'ici sont définies sur un ensemble de points de l'espace à n dimensions G_n; on peut exprimer ce fait en disant que *l'argument de la fonction est un point de l'espace à n dimensions;* on a vu que la théorie des ensembles de points dans G_n, sur laquelle nous avons fait reposer la théorie des fonctions continues et discontinues, est dominée par la notion de point limite. Ce sont précisément ces deux notions: ensemble de points, point limite, qu'il nous sera utile, pour la suite de nos recherches, de remplacer par des notions un peu différentes.

J'ai été conduit ainsi à la notion *d'ensemble de suites d'entiers*, que j'appelle aussi *espace à* 0 *dimension,* pour des raisons exposées dans le courant du mémoire, et j'étudie les fonctions définies sur ces nouveaux ensembles. Le théorème qui termine le travail donne une condition très large sous laquelle une fonction est de classe ≤ 3.

[1] Acta Mathematica, t. 30.

CHAPITRE I.

Notion des ensembles de suites d'entiers.

1. Considérons l'ensemble, souvent cité, des points du segment (o, 1) dont l'abscisse est de la forme:

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\cdots, \tag{1}$$

chaque nombre c étant égal à o ou 2. Soit P cet ensemble, qui est, comme on sait, parfait et non dense dans le continu. Je le divise en deux ensembles parfaits P_1 et P_2, en rangeant dans P_1 les points de P pour lesquels $c_1=0$, dans P_2 ceux pour lesquels $c_1=2$; ainsi P_1 comprend les points de P situés dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, P_2 comprend ceux de l'intervalle $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Je divise de même P_1 en deux ensembles $P_{1,1}$ et $P_{1,2}$, un point de P_1 appartenant à $P_{1,1}$ ou à $P_{1,2}$ suivant qu'on a pour ce point $c_2=0$ ou $c_2=2$.

D'une manière générale, je désigne par $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$, n étant un entier positif quelconque et chacun des nombres a_i étant egal à 1 ou 2, l'ensemble des points de P pour lesquels les n premiers nombres c du développement (1) ont des valeurs fixes définies par la loi suivante:

$$c_i=0 \text{ si } a_i=1; \quad c_i=2 \text{ si } a_i=2 \qquad (i=1, 2, \cdots n). \tag{2}$$

L'ensemble $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$ est parfait et a pour points extrêmes les points d'abscisses:

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n} \quad \text{et} \quad \frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\frac{1}{3^n}.$$

Considérons une suite infinie d'entiers dont chacun est égal à 1 ou 2, soit:

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{3}$$

Considérons les ensembles:

$$P_{a_1}, P_{a_1,a_2}, \ldots P_{a_1,a_2,\ldots a_n}, \ldots \tag{4}$$

D'après la définition de ces ensembles, chacun d'eux est contenu dans le précédent; comme ils sont fermés, il y a au moins un point qui leur est commun; d'ailleurs, un point qui appartient à $P_{a_1,a_2,\ldots a_n}$ a par cela même les n premiers termes de son développement déterminés; donc un point commun à tous

les ensembles (4) a tous ses termes déterminés, il est donc unique; c'est le point d'abscisse:

$$\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_n}{3^n} + \cdots$$

les c étant liés aux a par les relations (2).

Inversement, tout point de P, étant susceptible d'être représenté par le développement (1), où les c sont égaux à 0 ou 2, peut être considéré comme le point unique commun aux ensembles:

$$P_{a_1},\ P_{a_1, a_2}, \ldots P_{a_1, a_2, \ldots a_n}, \ldots$$

les a étant définis par la condition que:

$$a_i = 1 \text{ si } c_i = 0; \quad a_i = 2 \text{ si } c_i = 2.$$

Nous nous trouvons avoir établi ainsi, entre les points de P et les suites d'entiers (3), *une correspondance biunivoque et réciproque*, ce qui nous permet de représenter un point quelconque de P par la suite $[a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots]$ qui lui correspond d'après la loi précédente. On voit que deux points qui sont situés dans le même ensemble à n indices sont représentés par des suites ayant en commun les n premiers nombres, et réciproquement.

Cela posé, cherchons à exprimer le fait qu'une suite de points de $P: A_1$, $A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ a pour limite un point A_0 (nécessairement contenu dans P), *en supposant tous ces points définis par les suites d'entiers correspondantes.* La solution de ce problème est immédiate.

Soit A_0 le point $[(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$. Il appartient, quel que soit n, à l'ensemble $P_{(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0}$ que je désigne, pour abréger, par Q_n.

Remarquons que les extrémités gauche et droite de Q_n sont respectivement extrémités droite et gauche d'intervalles contigus à P, de sorte qu'il est possible de trouver un intervalle auquel tous les points de Q_n (même les points extrêmes), sont intérieurs, et qui ne contient pas d'autres points de P que ceux de Q_n. Il en résulte que, A_0 appartenant à Q_n, et étant limite de la suite: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, *les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q_n.*

On a la réciproque suivante. Si, quel que soit n, les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q_n, la suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ a pour limite A_0. Cela résulte de ce que, quand n croît indéfiniment, les points extrêmes de l'ensemble Q_n, dont la distance est $\frac{1}{3^n}$, tendent tous deux vers A_0.

Ce double résultat peut, si l'on introduit la représentation des points de P par des suites d'entiers, s'énoncer de la manière suivante.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point $A_\nu : [(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ *ait pour limite, quand* ν *croît indéfiniment, le point* $A_0 : [(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$ *est que, quel que soit* n, *il y ait un entier* h *tel qu'on ait, pour* $\nu > h$:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

2. On peut donner immédiatement quelque extension aux notions qui précédent.

Prenons un ensemble parfait linéaire non dense *quelconque* P, ayant pour points extrêmes deux points A et B. Parmi les intervalles contigus à P, (dont aucun, comme on sait, n'a pour extrémité A ou B), prenons-en $h - 1$ arbitraires; si on enlève ces intervalles de l'intervalle total AB, il reste h intervalles tels que tout point de P fait partie de l'un d'eux. L'ensemble des points de P contenus dans l'un quelconque d'entre eux constitue un ensemble parfait Q, dont les points extrêmes sont, comme plus haut, extrémités d'intervalles contigus à P, de sorte que si A_0 appartient à Q et est limite d'une suite $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, les A_ν sont, à partir d'un certain indice, contenus dans Q.

Désignons les h ensembles partiels en lesquels P se trouve ainsi décomposé par P_1, $P_2, \ldots P_h$, *l'attribution des indices* $1, 2, \ldots h$ *étant d'ailleurs faite d'une manière complètement arbitraire.* (Cette remarque aura une grande importance pour la suite). P_1, $P_2, \ldots P_h$ seront dits ensembles partiels du premier ordre. i étant l'un des entiers $1, 2, \ldots h$, nous pouvons, par le même procédé, décomposer P_i en un nombre fini θ_i d'ensembles parfaits, (θ_i pouvant varier avec i). On désignera les ensembles en lesquels se décompose P_i par $P_{i,1}$, $P_{i,2}, \ldots P_{i,\theta_i}$, l'attribution du second indice à ces différents ensembles étant faite d'une manière arbitraire. On a ainsi des ensembles du deuxième ordre, on décompose chacun d'eux en ensembles partiels, qui seront dits du troisième ordre, et ainsi de suite. Si on se trouve avoir défini un ensemble désigné par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$, on le décompose en un nombre fini $\theta_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ d'ensembles parfaits qu'on note $P_{a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}}$, l'indice a_{n+1} recevant les valeurs $1, 2, \ldots \theta_{a_1, a_2, \ldots a_n}$.

Nous supposerons qu'en faisant cette suite d'opérations, on s'astreigne à observer la loi suivante. Si on considère tous les ensembles partiels du n^{me} ordre, le maximum λ_n de la distance des deux points extrêmes de chacun de ces ensembles tend vers 0 quand n croît indéfiniment.

Dans ces conditions, si nous nous donnons une suite d'entiers positifs:

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

telle que, quel que soit n, il existe un ensemble désigné par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$, ces ensembles vérifient les conditions:

$$(2) \qquad P_{a_1} \geqq P_{a_1, a_2} \geqq \cdots \geqq P_{a_1, a_2, \ldots a_n} \geqq$$

Comme la distance des deux points extrêmes du n^{me} d'entre eux tend vers o, il y a un point unique qui est contenu dans tous, soit A; A est un point de P. Inversement, si on part d'un point A de P, ce point fait partie d'un ensemble partiel du premier ordre bien déterminé, d'un ensemble partiel du second ordre contenu dans le précédent et bien déterminé, etc., de sorte qu'il existe une suite (1) telle que les ensembles (2) correspondants ont en commun le seul point A. On peut donc dire qu'il y a correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des points de P et un certain ensemble de suites d'entiers positifs, à savoir les suites $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$ telles que, quel que soit n, l'ensemble $P_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ existe: un point A de P et une suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ se correspondent si A est contenu, quel que soit n, dans $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$.

Cela étant, il est facile de vérifier que le théorème du § 1 sur la condition pour que le point A_ν représenté par $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ ait pour limite A_0: $[(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$ quand ν croît indéfiniment, subsiste dans le cas actuel. En effet, pour que A_ν tende vers A_0, il faut et il suffit que, quel que soit n, les A_ν finissent par être compris dans l'ensemble $P_{(a_1)_0, (a_2)_0, \ldots (a_n)_0}$, ce qui est équivalent à ce fait qu'on doit avoir, quand ν surpasse un certain entier h:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

3. Pour prendre un autre exemple, désignons par P l'ensemble de tous les points du segment linéaire (o, 1). On peut dire que la représentation des abscisses de ces points par des fractions décimales, c'est-à-dire par des expressions de la forme:

$$(1) \qquad \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \qquad (0 \leqq a_i \leqq 9)$$

équivaut à une correspondance entre les points de P et les suites d'entiers

$$(2) \qquad (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots). \qquad (a_i = 0, 1, 2, \ldots 9)$$

Mais ici nous n'avons pas une correspondance biunivoque, car s'il est vrai qu'une expression de la forme (1) définit un point unique de P, il existe des points de P qui sont représentables par deux expressions distinctes de cette forme, ce sont les points d'abscisse $\frac{a}{10^h}$ (a et h entiers).[1] On a, en effet, si $a_n > 1$:

[1] Exception est faite pour les points d'abscisse o et 1.

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n-1}{10^n}+\frac{9}{10^{n+1}}+\frac{9}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{9}{10^{n+h}}+\cdots$$

ce que nous écrivons, en abrégé:

$$(a_1, \ldots a_{n-1},\ a_n,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots) = (a_1, \ldots a_{n-1},\ a_n - 1,\ 9,\ 9,\ 9, \ldots).$$

Nous pouvons, comme dans les exemples précédents, diviser l'ensemble P en ensembles partiels d'ordres $1, 2, \ldots n, \ldots$ en désignant par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ l'ensemble des points d'abscisse: $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\frac{y}{10^n}$, avec la condition: $0 \leqq y \leqq 1$, chaque nombre a étant l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots 9$. Les ensembles partiels sont ici des intervalles.

Si l'on se donne une suite d'entiers $(a_1, a_2, \ldots a_n \ldots)$, on a:

$$P_{a_1} > P_{a_1, a_2} > \cdots > P_{a_1, a_2, \ldots a_n} > \cdots$$

et il y a un point unique contenu dans tous ces ensembles, point que nous représentons par la suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$. Mais si l'on part d'un point A de P, deux cas sont à distinguer:

1°. A n'est pas de la forme $\frac{\alpha}{10^p}$ (α entier). Alors A fait partie d'un ensemble du premier ordre déterminé P_{a_1}, d'un ensemble du deuxième ordre bien déterminé contenu dans le précédent, P_{a_1, a_2}, etc. De plus, A est *intérieur* à chacun de ces ensembles. Par conséquent, pour qu'une suite de points de P: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ tende vers A, il faut et il suffit que, quel que soit n, les A_ν finissent par être contenus dans $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$, ou bien, en introduisant la représentation de A_ν par la suite correspondante: $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$, *il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe un entier h tel que, pour $\nu > h$, la suite (ou, s'il y a lieu, l'une quelconque des deux suites) correspondant à A_ν ait en commun avec la suite correspondant à A les n premiers nombres.*

2°. A est de la forme $\frac{\alpha}{10^p}$. A admet deux représentations, soit:

$$(a_1,\ a_2, \ldots a_{p-1},\ a_p - 1,\ 9,\ 9,\ 9, \ldots) = (a_1,\ a_2, \ldots a_{p-1},\ a_p,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots).$$

Quel que soit $n > p$, le point A est l'extrémité commune des deux ensembles partiels d'ordre n:

(3) $$P_{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1, 9, 9, \ldots 9} \text{ et } P_{a_1, a_2, \ldots a_{p-1}, a_p, 0, 0, \ldots 0}.$$

Pour qu'une suite: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ tende vers A, il faut et il suffit que, quel que soit $n > p$, tout point A_ν dont l'indice surpasse un certain entier h appartienne à l'un ou à l'autre des deux ensembles (3). En introduisant la représentation des points par les suites d'entiers, cette condition s'énonce ainsi: *Il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe h tel que pour $\nu > h$, le système des n entiers $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu]$ coïncide avec le système des n premiers entiers de l'une ou l'autre des deux suites qui représentent A.*

4. Etudions maintenant la représentation des nombres par des fractions continues. Comme nous l'avons rappelé au § 31 de la première partie, tout nombre irrationnel x de l'intervalle (0, 1) est développable d'une manière déterminée en fraction continue illimitée, soit:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}\\ \ddots$$

ce que nous écrivons:

$$x = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots).$$

Cette relation établit une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble P des points irrationnels du segment (0, 1) et l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs. Désignons par $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ l'ensemble des points irrationnels pour lesquels les n premiers quotients incomplets sont les nombres fixes $a_1, a_2, \ldots a_n$; on voit que $P_{a_1, a_2, \ldots a_n}$ se compose de tous les points irrationnels d'un certain intervalle, que nous avons désigné précédemment (Première partie, § 31) par $I_{a_1, a_2, \ldots a_n}$. Dans le cas actuel, l'ensemble P se trouve décomposé en une infinité (dénombrable) d'ensembles partiels du premier ordre: $P_1, P_2, \ldots$, chacun de ceux-ci en une infinité d'ensembles partiels du deuxième ordre, etc....

Le point A de P correspondant à la suite $(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ est *intérieur* à chacun des intervalles $I_{a_1, a_2, \ldots a_n}$. Il en résulte que, *pour que le point A_ν, variable avec ν, et représenté par la suite $[(a_1)_\nu, (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$ ait pour limite A, il faut et il suffit que, quel que soit n, il existe un entier h tel que, pour $\nu > h$, la suite correspondant à A_ν ait en commun avec la suite correspondant à A les n premiers nombres.*

5. Enfin, comme dernier exemple, considérons l'ensemble étudié dans le chapitre V de la première partie, et désigné par P_ω, ensemble qui se compose des points irrationnels compris entre 0 et 1 pour lesquels le quotient incomplet

de rang n croît indéfiniment avec n. On a défini (§ 34, 35) certains ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, (n, i_1, i_2, ... i_n recevant toutes les valeurs entières positives); tout point A de P_ω fait partie, d'une manière bien déterminée, d'une suite d'ensembles tels que:

$$(1) \qquad p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \cdots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \cdots$$

et réciproquement, si on se donne arbitrairement une suite d'entiers positifs (i_1, i_2, ... i_n, ...), on a vu que les ensembles (1) correspondants ont en commun un point unique qui appartient à P_ω. Il y a ainsi une correspondance biunivoque entre les différents points de P_ω et l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs.

Etant donné un point A de P_ω, désignons par (a_1, a_2, ... a_n, ...) la suite des quotients incomplets qui lui correspond, et par (i_1, i_2, ... i_n, ...) la suite des indices des ensembles p contenant A. Cherchons si, en utilisant cette seconde représentation, il est possible de trouver une proposition analogue au théorème des § 1, 2, 3, 4.

Remarquons d'abord que si deux suites (i_1, i_2, ... i_n, ...) et (i'_1, i'_2, ... i'_n, ...) ont en commun les n premiers nombres, c'est-à-dire si $i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$, ... $i_n = i'_n$, les deux points A et A' de P_ω correspondants sont contenus dans le même ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. D'autre part, on sait que $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ a pour dérivé l'ensemble parfait $q_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, et la distance maxima de deux points de cet ensemble tend vers o quand n croît indéfiniment.

Cela posé, supposons qu'on ait, d'une part un point $A : (i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$, d'autre part un point A_ν, variable avec ν: $[(i_1)_\nu, (i_2)_\nu, \ldots (i_n)_\nu, \ldots]$ tel que, quel que soit n, on ait, quand ν dépasse une certaine valeur:

$$(i_1)_\nu = i_1, \quad (i_2)_\nu = i_2, \ldots \quad (i_n)_\nu = i_n.$$

Dans ces conditions, A_ν tend vers A, car A_ν finit par être contenu dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, quel que soit n; sa distance à A tend donc vers o quand ν croît indéfiniment.

Mais cette proposition n'a pas ici de réciproque, car deux points de P_ω peuvent être pris aussi voisins qu'on veut l'un de l'autre, et cependant appartenir à des ensembles p à n indices différents, par exemple à deux ensembles p_i et $p_{i'}$ différents; cela résulte de ce que l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles p_i est partout dense dans le continu.

6. On peut, de l'étude des différents exemples que nous venons de passer en revue, dégager les caractères communs que voici. Une correspondance se

trouve établie entre un ensemble de points d'une part, et d'autre part un certain ensemble de suites d'entiers; cette correspondance est, dans certains cas, biunivoque, et dans d'autres cas, comporte certaines restrictions, par le fait qu'il y a dans l'un des ensembles des éléments exceptionnels ayant deux correspondants dans l'autre. Mais le fait le plus intéressant pour l'étude que j'ai en vue est que *la notion de point variable tendant vers un point fixe est remplacée par celle-ci: une suite d'entiers, variable, a en commun avec une suite fixe, un nombre de termes au commencement qui croît indéfiniment.*

On conçoit qu'il peut y avoir intérêt à changer le point de départ de toute cette étude en procédant de la manière suivante: on prendra comme base du raisonnement, comme éléments fondamentaux, les suites d'entiers, considérées *a priori*, et l'on adoptera, comme définition de la limite, pour ces éléments, la propriété que nous venons d'énoncer et qui, dans les théories courantes, constitue un résultat. C'est le nouveau point de vue auquel je vais me placer maintenant; dans le chapitre qui suit, je poserai les définitions premières, et j'étudierai, sur les ensembles ainsi définis, les propriétés analogues à celles qui, dans la théorie des ensembles de points, ont fait l'objet du chapitre II de la première partie. Je m'occuperai ensuite, dans le chapitre III, de définir et d'étudier les fonctions définies sur ces nouveaux ensembles.

CHAPITRE II.

Théorie des ensembles de suites d'entiers.

7. Les éléments sur lesquels nous raisonnerons sont les suites d'entiers de la forme:

$$(a_1,\ a_2, \ldots a_n, \ldots)$$

où chaque élément a_n est un des entiers positifs 1, 2, 3, ... Ces éléments joueront, dans les théories qui vont suivre, le même rôle que les points dans les théories précédemment traitées, et nous étudierons des *ensembles de suites d'entiers*, c'est-à-dire des ensembles dont chaque élément est une suite de la forme indiquée. L'ensemble de *toutes* les suites d'entiers positifs sera appelé *ensemble fondamental*.

Nous ferons, au sujet de ces nouveaux ensembles, des conventions identiques à celles qui ont été faites pour les ensembles de points (Première partie,

§ 5). Etant donnés des ensembles de suites d'entiers P, Q, R... en nombre fini ou infini, nous désignons par $M(P, Q, R, \ldots)$, $D(P, Q, R, \ldots)$ respectivement l'ensemble formé par la réunion de P, Q, R, ... et l'ensemble composé des éléments communs à P, Q, R, ... Dans le cas où P, Q, R, ... n'ont deux à deux aucun élément commun, nous écrivons: $M(P, Q, R, \ldots) = P + Q + R + \ldots$ et cet ensemble est dit la somme de P, Q, R, ... Les égalités ou inégalités: $P = Q$, $P \geqq Q$ (ou $Q \leqq P$), $P > Q$ (ou $Q < P$), $P = 0$, expriment respectivement que P et Q sont identiques, que P contient tous les éléments de Q, que P contient, outre les éléments de Q, un élément au moins, que P ne contient aucun élément. Si l'on a $P \geqq Q$, on désigne par $P - Q$ l'ensemble des éléments contenus dans P sans être contenus dans Q.

8. La notion fondamentale qui nous servira dans cette étude est celle *d'élément limite. On dit que l'élément*

$$A_0 : [(a_1)_0, \ (a_2)_0, \ldots (a_n)_0, \ldots]$$

est limite de l'élément, variable avec ν:

$$A_\nu : [(a_1)_\nu, \ (a_2)_\nu, \ldots (a_n)_\nu, \ldots]$$

si, quel que soit n, *il existe un entier* h *tel que, pour* $\nu > h$, *on a*:

$$(a_i)_\nu = (a_i)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Deux *éléments-suites* distincts sont considérés comme d'autant plus voisins l'un de l'autre qu'ils ont en commun un plus grand nombre de termes consécutifs à partir du premier. Ceci nous conduit à effectuer des divisions dans l'ensemble fondamental. Réunissons ensemble toutes les suites pour lesquelles le premier terme a une valeur déterminée α; nous partageons ainsi l'ensemble fondamental en une infinité dénombrable d'ensembles partiels; appelons respectivement groupe (1), groupe (2), groupe (3), etc. l'ensemble des suites pour lesquelles le premier terme est 1, 2, 3, etc.: ce seront *les groupes du premier ordre.* Chacun de ces groupes se subdivise de la même manière en groupes du deuxième ordre, d'après la valeur du second terme; ainsi le groupe (1) est formé par la réunion des groupes du second ordre: (1, 1), (1, 2), etc.

D'une manière générale, étant donné un système d'entiers positifs rangés dans un ordre déterminé: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, appelons groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ l'ensemble des suites pour lesquelles les p premiers termes sont respectivement égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$; ce groupe sera dit d'ordre p.

Le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ se subdivise en une infinité dénombrable de groupes d'ordre $(p + 1)$, savoir:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, 1), (\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p, 2), \ldots .$$

chacun de ceux-ci en groupes d'ordre $p+2$, etc.

Etant donnée une suite d'entiers A déterminée, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p, \ldots)$, cette suite appartient, comme on voit, au groupe d'ordre 1: (α_1), au groupe d'ordre 2: $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots$, au groupe d'ordre p: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$, etc. Réciproquement, si l'on a une suite de groupes d'ordres successifs: $1, 2, \ldots p, \ldots$, chacun de ces groupes étant contenu dans le précédent, il existe une suite d'entiers bien déterminée qui est contenue dans tous ces groupes.

A l'aide de ces notions nouvelles, la définition générale de la limite peut s'énoncer dans les termes suivants:

L'élément-suite A_0 est limite de la suite d'éléments-suites $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ si, quel que soit n, les A_ν sont, quand ν dépasse une certaine valeur, contenus dans le groupe d'ordre n qui contient A_0.

9. *Etant donné un ensemble P de suites, on dit qu'une suite A,* (faisant partie ou non de *P*), *est limite pour P si tout groupe contenant A contient au moins une suite autre que A faisant partie de P.*

Transformons cette condition. Soit n un entier, désignons par g_n le groupe d'ordre n qui contient A. La condition qui vient d'être énoncée étant supposée remplie, il existe dans g_n une suite A_1 faisant partie de P et distincte de A. Les suites A et A_1 ont en commun les n premiers termes, elles peuvent avoir en commun un plus grand nombre de termes consécutifs à partir du premier, mais il existe certainement un entier $n_1 > n$ tel que les n_1 premiers termes de A_1 ne sont pas identiques aux n_1 premiers termes de A, de telle sorte que les deux groupes d'ordre n_1 qui contiennent respectivement A et A_1 sont distincts. Cela étant, dans le groupe d'ordre n_1 qui contient A, nous pouvons prendre une suite A_2 faisant partie de P et distincte de A; A_2 sera distincte de A_1. En répétant le raisonnement, on trouve $n_2 > n_1$ tel que le groupe d'ordre n_2 contenant A ne contient pas A_2, dans ce même groupe on prend A_3 faisant partie de P et distincte de A, et ainsi de suite. Le procédé se poursuit indéfiniment, de sorte qu'on obtient une série infinie de suites de $P: A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$, chacune d'elles étant distincte des précédentes. On voit ainsi que *si A est limite pour P, tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P.* La réciproque est évidente, car l'hypothèse que tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P entraîne ce fait que tout groupe contenant A contient une suite de P autre que A. En résumé, on a, pour la notion d'élément limite d'un ensemble, la nouvelle définition, complètement équivalente à la précédente:

Etant donné un ensemble P, une suite A est limite pour P si tout groupe contenant A contient une infinité de suites de P.

Remarquons que, dans la démonstration précédente, A_ν tend vers A, car A_ν est contenu dans le groupe d'ordre $n_{\nu-1}$ qui contient A, et $n_{\nu-1}$ croît indéfiniment. Donc, si A est limite pour P, il est possible d'extraire de P une série d'éléments: $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ distincts de A, et ayant A pour limite. La réciproque est évidente.

10. *Définitions.* Un ensemble P est dit *fermé* s'il contient tous ses éléments limites. — Un ensemble P est *dense en lui-même* si tout élément de P est limite pour P.

Un ensemble P est *parfait* s'il est à la fois fermé et dense en lui-même.

P étant quelconque, un élément de P qui n'est pas limite pour P est dit *isolé* dans P. D'après cela, un ensemble P est parfait s'il est fermé et ne contient aucun élément isolé.

P étant quelconque, l'ensemble des éléments limites de P est appelé dérivé d'ordre I de P, ou simplement dérivé de P: on le note P^1. Je dis que P^1 *est fermé;* il faut montrer que si A est un élément limite pour P^1, A fait partie de P^1; en effet, dans tout groupe g contenant A existe une suite de P^1, soit B; g, contenant la suite B, contient une infinité de suites de P; donc A est limite pour P, c'est-à-dire fait partie de P^1.

Il est évident que la condition pour qu'un ensemble P soit fermé, dense en lui-même, parfait, peut s'écrire: $P \geqq P^1$, $P \leqq P^1$, $P = P^1$. La condition $P \geqq Q$ entraîne $P^1 \geqq Q^1$.

Appelons ensemble dérivé d'ordre o de l'ensemble P la réunion de P et de son dérivé d'ordre I, P^1; soit donc: $P^0 = M(P, P^1)$. D'après cela, un élément A de P^0, ou bien fait partie de P, ou bien est limite pour P, de sorte que: *L'ensemble P^0 est l'ensemble des éléments A tels que tout groupe contenant l'un de ces éléments contient au moins un élément de P.* — P^0 est fermé et a pour dérivé P^1, car si A est limite pour P^0, tout groupe contenant A contient une infinité d'éléments de P ou de P^1, et par suite, de toutes façons, une infinité d'éléments de P; donc A fait partie de P^0 et de P^1. D'ailleurs, inversement, un élément de P^1, dérivé de P, fait partie du dérivé de $P^0 \geqq P$. Donc P^0 a bien pour dérivé P^1 et le contient, par suite est fermé.

Si P est fermé, de $P \geqq P^1$, on déduit: $P^0 = P$, et réciproquement cette condition exprime que P est fermé.

Si P est dense en lui-même, de $P \leqq P^1$ on déduit que le dérivé de P, qui est P^1, est contenu dans le dérivé de P^1. Donc P^1 est aussi dense en lui-même, et comme d'autre part P^1 est fermé, il est parfait.

Si $P, Q, \ldots R$ sont des ensembles fermés en nombre *fini*, $T = M(P, Q, \ldots R)$ est aussi fermé. En effet, un élément limite pour T est limite pour l'un au moins des ensembles $P, Q, \ldots R$, par suite fait partie de l'un d'eux, et aussi de T. Si $P, Q, \ldots R$ sont parfaits, T est parfait, car un élément A de T, s'il fait partie de P par exemple, est limite pour P, donc aussi pour T.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont des ensembles fermés en nombre *fini ou infini*, l'ensemble $S = D(P, Q, R, \ldots)$, s'il existe, est *fermé*. En effet, un élément A, limite pour S, est limite pour chacun des ensembles $P, Q, R, \ldots$, donc fait partie de tous ces ensembles, et par suite de S.

11. Soit P un ensemble de suites quelconque. Par rapport à P, les différents groupes définis au § 8 se distinguent en deux espèces, suivant qu'ils contiennent ou non des éléments de P. Nous dirons qu'un groupe est *relatif à* P s'il contient au moins un élément de P, qu'il est *extérieur* à P s'il ne contient aucun élément de P. On reconnaît immédiatement que: si un groupe g est extérieur à P, tout groupe contenu dans g est aussi extérieur à P; si un groupe g, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, est relatif à P, les groupes (α_1), (α_1, α_2), $\ldots$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h-1})$, qui contiennent g, sont aussi relatifs à P, et parmi les groupes d'ordre $h+1$ contenus dans g, il y en a au moins un qui est relatif à P. Enfin, par définition de P^0, un groupe relatif à P est aussi relatif à P^0, et réciproquement, de sorte que l'ensemble des groupes relatifs à P, P étant quelconque, coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble fermé.

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un certain ensemble P de suites, et nous avons défini l'ensemble des groupes relatifs à P, lequel possède la propriété suivante: Si Γ est cet ensemble de groupes, et A une suite quelconque de P, tous les groupes contenant A font partie de Γ. Inversement, donnons-nous *a priori* un ensemble de groupes Γ, et cherchons s'il existe des suites telles que tous les groupes contenant chacune d'elles fassent partie de Γ ou, comme nous dirons pour abréger, des suites *contenues* dans Γ, ou *appartenant* à Γ. Remarquons d'abord que si cela est, l'ensemble P de ces suites est fermé; car, soit A une suite limite pour P; quel que soit n, le groupe d'ordre n qui contient A contient, par hypothèse, des suites de P; donc il fait partie de Γ; donc A est telle que tous les groupes contenant A font partie de Γ, donc A fait partie de P, ce qui montre que P est fermé.

Etant donné un ensemble de groupes Γ, pour qu'il existe des suites contenues dans Γ, une première condition est que, si un groupe d'ordre p, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$, fait partie de Γ, tous les groupes (α_1), (α_1, α_2), $\ldots$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1})$ qui contiennent ce groupe, doivent aussi faire partie de Γ. Nous conviendrons de dire qu'un ensemble de groupes possédant cette propriété est *complet*.

Il faut en outre évidemment qu'il y ait dans Γ des groupes d'ordre n, quel que soit n. Ces deux conditions ne sont d'ailleurs pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant. Prenons tous les groupes d'ordre 1:

$$(1), \quad (2), \quad (3), \ldots$$

puis tous les groupes d'ordre 2 contenus dans (2), tous les groupes d'ordres 2 et 3 contenus dans (3), et d'une manière générale, quel que soit n, tous les groupes d'ordre $2, 3, \ldots n$, contenus dans (n). L'ensemble Γ de tous ces groupes est complet, il contient des groupes de tous les ordres, mais aucune suite n'appartient à Γ; car soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ une suite, le groupe d'ordre $\alpha_1 + 1$ qui la contient n'est pas contenu dans Γ.

Résumons ces résultats en disant que: Si Γ est un ensemble complet de groupes, il peut y avoir ou non des suites appartenant à Γ; s'il y en a, leur ensemble P est fermé; si Γ_1 est l'ensemble des groupes relatifs à P, Γ_1 est évidemment contenu dans Γ.

12. Demandons-nous maintenant à quelles conditions un ensemble Γ de groupes coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites. En interprétant les remarques du § 11, on a immédiatement des conditions nécessaires, qui peuvent s'énoncer comme il suit: L'ensemble Γ doit être complet, et si g est un groupe contenu dans Γ, d'ordre h, il y a au moins un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans g qui fait partie de Γ. Je dis que ces conditions sont suffisantes; en effet, supposons-les remplies; prenons, dans Γ, un groupe quelconque g, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$; d'une part les groupes (α_1), (α_1, α_2), … $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h-1})$ font partie de Γ, puisque Γ est complet; d'autre part, d'après la seconde condition, il existe dans Γ un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans Γ, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \alpha_{h+1})$; dans ce nouveau groupe existe, d'après la même condition, un groupe d'ordre $h+2$ contenu dans Γ, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \alpha_{h+1}, \alpha_{h+2})$; ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, et montre l'existence d'une suite infinie de groupes d'ordres $1, 2, \ldots h, h+1, h+2, \ldots$ dont chacun est contenu dans le précédent et appartenant tous à Γ; la suite définie par ces groupes appartient donc à Γ. En résumé, il existe des suites appartenant à Γ; on sait que l'ensemble P de ces suites est fermé; d'autre part, le groupe g dont on est parti est arbitraire dans Γ, on voit donc que tout groupe de Γ contient des suites de P, c'est-à-dire est relatif à P. Ainsi Γ coïncide avec l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites. On a ainsi le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble Γ de groupes constitue l'ensemble des groupes relatifs à un certain ensemble de suites est que Γ soit complet

et que, si g est un groupe d'ordre h de Γ, il y ait dans Γ un groupe d'ordre $h+1$ contenu dans g.

Etant donné un ensemble fermé P de suites, l'ensemble Γ des groupes relatifs à P est parfaitement déterminé, ainsi que l'ensemble Γ' des groupes extérieurs à P, Γ' se composant de tous les groupes qui ne font pas partie de Γ. Réciproquement, la connaissance de Γ, ou, ce qui revient au même, de Γ', permet de décider si une suite donnée fait ou non partie de P. En résumé, la connaissance d'un ensemble fermé est complètement équivalente à la connaissance des groupes relatifs à cet ensemble (ou des groupes extérieurs); cette propriété sera très utile dans la suite; pour le moment, nous en tirerons cette conséquence qu'un *ensemble fermé est déterminé par une infinité dénombrable de conditions.*

13. Supposons qu'un ensemble Γ de groupes satisfasse aux conditions du § précédent, de sorte qu'il existe des suites appartenant à Γ; l'ensemble P de ces suites est fermé. Demandons-nous à quelles conditions P sera parfait; faisons à ce sujet quelques remarques générales.

Si A est un élément de P non limite pour P, c'est-à-dire isolé dans P, il y a un entier n tel que le groupe d'ordre n qui contient A ne contient pas d'autre suite de P; si g est ce groupe, g est contenu dans Γ, et les seuls groupes contenus dans g qui font partie de Γ sont le groupe (unique) d'ordre $n+1$ contenant A, le groupe (unique) d'ordre $n+2$ contenant A, etc. Ainsi, dans un certain groupe g de Γ n'existe qu'un seul groupe d'ordre déterminé supérieur à celui de g et faisant partie de Γ.

Réciproquement, supposons que dans Γ existe un groupe g tel que, si n est son ordre, il n'existe dans Γ, pour chaque valeur de h, qu'un seul groupe d'ordre $n+h$ contenu dans g. Il en résulte évidemment que g ne contient qu'un seul élément faisant partie de P, lequel est par suite isolé dans P.

Pour que P soit parfait, c'est-à-dire ne contienne aucun élément isolé, il faut et il suffit que la condition précédente ne soit jamais réalisée, c'est-à-dire que *dans tout groupe g d'ordre n contenu dans Γ existent au moins deux groupes d'un même ordre supérieur à n et contenus dans Γ.* On peut vérifier directement que c'est bien là la condition nécessaire et suffisante pour que P soit parfait.

La condition est nécessaire, car si P est parfait, tout élément de P est limite pour P; donc tout groupe g de Γ, contenant un élément de P, en contient au moins deux distincts; si n est l'ordre de g, pour h assez grand, les groupes d'ordre $n+h$ qui contiennent ces deux éléments sont distincts, donc il y a dans g deux groupes d'un même ordre supérieur à n et contenus dans Γ.

La condition est suffisante: en effet, supposons-la remplie. Si A est un élément de P, tout groupe g contenant A contient, par hypothèse, deux groupes

g' et g'' *d'un même ordre* supérieur à celui de g et contenus dans Γ; g' et g'', étant contenus dans Γ, contiennent chacun au moins un élément de P; on a donc ainsi au moins deux éléments *distincts* de P contenus dans g; ainsi g contient certainement un élément de P autre que A; donc A est limite pour P, ce qui achève de démontrer la proposition.

14. Nous allons démontrer, sur les ensembles de suites, un théorème complètement analogue à celui qui a été démontré sur les ensembles de points à n dimensions dans les «Leçons sur les fonctions discontinues» (§ 62, p. 102).

Appelons (Δ) l'ensemble de tous les groupes possibles. (Δ) est évidemment dénombrable. Etant donné un ensemble fermé P, appelons $\Delta(P)$ l'ensemble des groupes extérieurs à P, qui, comme nous l'avons vu, détermine complètement P. Il est évident que si $P \geqq Q$, (P et Q étant fermés), tout groupe extérieur à P est extérieur à Q, de sorte que $\Delta(Q)$ contient tous les éléments dont se compose $\Delta(P)$. De plus, si $P > Q$, il y a certainement des groupes qui appartiennent à $\Delta(Q)$ sans appartenir à $\Delta(P)$, sans quoi l'identité de $\Delta(Q)$ et de $\Delta(P)$ entraînerait celle de P et de Q, contrairement à l'hypothèse.

Cela posé, supposons qu'on ait des ensembles fermés, correspondant aux nombres ordinaux des classes I et II:

$$P_0, P_1, P_2, \dots P_n, \dots P_\omega, \dots P_\alpha, \dots \tag{1}$$

avec la condition que $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$. D'après ce qui précède, quel que soit α, $\Delta(P_{\alpha+1})$ contient tous les éléments de $\Delta(P_\alpha)$; désignons par $C(P_\alpha)$ l'ensemble des groupes qui font partie de $\Delta(P_{\alpha+1})$ sans faire partie de $\Delta(P_\alpha)$. On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $C(P_\alpha)$ soit nul est que $P_{\alpha+1} = P_\alpha$. Considérons les ensembles de groupes:

$$C(P_0), \quad C(P_1), \dots C(P_n), \dots C(P_\alpha), \dots \tag{2}$$

Chacun de ces ensembles constitue une partie de l'ensemble dénombrable (Δ), et deux d'entre eux n'ont aucun élément commun, car un élément de $C(P_\alpha)$ fait partie de $\Delta(P_{\alpha+1})$, par suite de $\Delta(P_{\alpha+2})$ et de tous les $\Delta(P_{\alpha'})$ pour lesquels $\alpha' > \alpha$, il ne fait donc pas partie de $C(P_{\alpha'})$ si $\alpha' > \alpha$.

Il y a donc au plus une infinité *dénombrable* d'ensembles (2) non nuls; les indices de ceux des ensembles (2) qui ne sont pas nuls formant ainsi un ensemble fini ou dénombrable, il y a un nombre α des classes I ou II qui est supérieur à tous ces indices. Si $\alpha' \geqq \alpha$, on a $C(P_{\alpha'}) = 0$, d'où résulte:

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = P_{\alpha+2} = \cdots = P_{\alpha'} = \cdots, \qquad \alpha' > \alpha. \tag{3}$$

Désignons par P_Ω l'ensemble commun à tous les ensembles (1); on voit que *les ensembles* (1) *sont, pour des valeurs suffisamment grandes de l'indice, identiques à* P_Ω. C'est là le théorème que j'avais en vue. Il y a un nombre β bien déterminé qui est le plus petit tel qu'on ait $P_\beta = P_\Omega$.

Ajoutons deux remarques, analogues aux remarques I et III (loc. cit., § 63, p. 104).

1°. Supposons que les ensembles (1) satisfassent à la condition que, si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun aux ensembles $P_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$. Soit alors A un élément quelconque de P_0; si A ne fait pas partie de tous les ensembles (1), c'est-à-dire de P_Ω, soit δ le plus petit nombre tel que P_δ ne contient pas A; δ ne peut être de seconde espèce, car A appartiendrait à tous les ensembles dont l'indice est inférieur à δ, et par suite à P_δ, d'après la condition donnée; donc δ est de première espèce et a un précédent γ; A appartient à P_γ sans appartenir à $P_{\gamma+1}$. En résumé, tout élément A de P_0 fait partie, ou bien de $P_\Omega = P_\beta$, ou bien d'un ensemble $P_\gamma - P_{\gamma+1}$, et cela d'une manière bien déterminée. Nous exprimerons ce résultat au moyen de la formule:

$$P_0 = \Sigma (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega, \quad \gamma < \beta.$$

La somme est étendue à toutes les valeurs de γ des classes I et II, ou si l'on veut, seulement aux valeurs $< \beta$.

2°. Supposons que les ensembles (1) satisfassent à la condition que tout élément isolé de l'un quelconque de ces ensembles ne fait pas partie de l'ensemble suivant. Dans ces conditions, je dis que P_Ω, s'il n'est pas nul, est parfait. En effet, il ne peut exister d'élément isolé dans P_Ω, car un tel élément, soit A, serait isolé dans $P_\beta = P_\Omega$, par suite ne ferait pas partie de $P_{\beta+1}$, ce qui est en contradiction avec le fait que $P_\beta = P_{\beta+1} = P_\Omega$. Donc P_Ω est nul ou parfait.

Il est utile de remarquer que si on a une série infinie d'ensembles fermés de suites, dont chacun contient le suivant, soit:

$$P_0 > P_1 > P_2 > \cdots > P_n > \cdots$$

il n'y a pas nécessairement d'élément commun à tous ces ensembles.[1] (Il suffit par exemple de prendre pour P_n l'ensemble de toutes les suites dont le premier terme est $> n$.) C'est pourquoi nous ne chercherons pas à donner pour les ensembles actuels, de théorème analogue à celui de la Remarque II (loc. cit., § 63).

[1] On peut démontrer que cela a lieu dans le cas où l'ensemble P_0 est tel que, si g est un groupe relatif à P_0, et si h est son ordre, les groupes d'ordre $h+1$ relatifs à P_0 et contenus dans g sont en nombre *fini*

15. Etant donné un ensemble de suites arbitraire P, nous avons défini (§ 10) les dérivés d'ordre 0 et 1 de P, et nous savons que P^0 a pour dérivé P^1. Nous définirons le dérivé d'ordre α de P, P^α, α étant un nombre ordinal quelconque des classes I ou II, par la double convention suivante:

1°. Si α est de première espèce et > 0, P^α est le dérivé d'ordre 1 de $P^{\alpha-1}$.

2°. Si α est de deuxième espèce, P^α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P^{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

Les ensembles $P^0, P^1, \ldots P^\alpha, \ldots$ ainsi définis, satisfont aux conditions remplies, dans le § précédent, par les ensembles désignés par P_0, P_1, etc. . . .; ils satisfont aussi aux deux conditions complémentaires 1° et 2°. On peut donc énoncer les résultats suivants, en désignant par P^Ω (dérivé d'ordre Ω de P) l'ensemble commun à tous les ensembles P^α:

P^Ω est nul ou parfait; il y a un nombre déterminé β des classes I ou II tel que:

$$P^\beta = P^{\beta+1} = \cdots = P^\Omega.$$

Si $\alpha < \beta$, on a $P^\alpha > P^\beta$. Enfin, on a:

$$P^0 = \Sigma (P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega, \quad \gamma < \beta. \tag{1}$$

Remarquons qu'aucun terme de la somme n'est nul pour $\gamma < \beta$, car la condition $P^\gamma = P^{\gamma+1}$ exprimerait que P^γ est parfait et coïncide avec tous les ensembles dérivés qui suivent, ce qui contredit ce fait que $P^\gamma > P^\Omega$.

Un ensemble tel que $P^\gamma - P^{\gamma+1}$ se compose de tous les éléments *isolés* de l'ensemble fermé P^γ; a fortiori chacun de ces éléments est isolé pour l'ensemble $P^\gamma - P^{\gamma+1}$. Appelons d'une manière générale ensemble *isolé* tout ensemble tel que chacun de ses éléments est isolé dans l'ensemble; je dis qu'un *ensemble isolé est dénombrable.*

Faisons une remarque préliminaire. Si Q est un ensemble isolé, A un élément de Q, et si on désigne par $g_1, g_2, \ldots g_n, \ldots$ les groupes d'ordres $1, 2, \ldots n, \ldots$ qui contiennent A, nous avons déjà vu (§ 13) que, à partir d'un certain rang, ces groupes ne contiennent pas d'autre élément de Q que A; parmi les groupes qui remplissent ces conditions, l'un d'eux a le plus petit indice, c'est-à-dire est d'ordre minimum; ainsi, à tout élément A de Q correspond un groupe bien déterminé g qui contient A, ne contient pas d'autre élément de Q, tandis que le groupe d'ordre inférieur à celui de g et contenant g (s'il existe) contient au moins deux éléments de Q.

Cela posé, prenons: les groupes d'ordre 1 ne contenant qu'un seul élément de Q; puis, les groupes d'ordre 2 non contenus dans les précédents, et ne con-

tenant qu'un seul élément de Q; puis, les groupes d'ordre 3 non contenus dans les précédents et ne contenant qu'un seul élément de Q, etc. . . .; supposons cette opération prolongée indéfiniment. On obtient ainsi un ensemble de groupes tels que chacun d'eux contient un seul élément de Q et que tout élément A de Q est contenu dans un et un seul d'entre eux, car le groupe g correspondant à A d'après la convention précédente est obtenu par le procédé indiqué, tandis qu'aucun des autres groupes contenant A n'est obtenu. Ainsi il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble Q et un certain ensemble de groupes, lequel est dénombrable. Donc Q est aussi dénombrable.

Dans la formule (1), l'ensemble P^0 désigne un ensemble fermé quelconque; il y a lieu de distinguer deux cas suivant que P^Ω est nul ou existe effectivement; dans tous les cas, $\Sigma(P^\gamma - P^{\gamma+1})$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles isolés, et est par suite dénombrable. On peut donc dire que:

Un ensemble fermé de suites, ou bien est dénombrable, ou bien se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.[1]

16. Soit P un ensemble parfait de suites; si g est un groupe relatif à P, l'ensemble des suites de P contenues dans g, soit $D(P, g)$, est parfait; en effet, d'abord cet ensemble est fermé, comme étant l'ensemble commun aux deux ensembles fermés P et g; de plus, toute suite A de $D(P, g)$ est limite pour cet ensemble, car si g' est un groupe contenant A, il y a dans g' une infinité d'éléments de P, et si g' est contenu dans g, ces suites appartiennent à $D(P, g)$, donc A est limite pour $D(P, g)$, qui est donc parfait. Nous dirons que l'ensemble parfait $D(P, g)$ est la *portion* de P déterminée par le groupe g.

Soit Q un ensemble quelconque contenu dans P. Il y a deux cas possibles, qui s'excluent l'un l'autre:

1°. *Dans toute portion P_1 de P existe une portion P_2 de P qui ne contient aucun élément de Q. Nous dirons dans ce cas que Q est non dense dans P.*

2°. *Il y a une portion P_1 de P telle que toute portion P_2 de P_1 contient des éléments de Q. Nous dirons alors que Q est partout dense dans P_1.*

On voit que dans le premier cas, Q^0 (qui est contenu dans P, puisque $Q \leq P$ entraine $Q^0 \leq P^0 = P$) est, comme Q, non dense dans P, tandis que, dans le second cas, tous les éléments de la portion désignée par P_1 appartiennent à Q^0, de sorte que Q^0 coïncide avec P dans un certain groupe relatif à P.

Si Q est non dense dans P, la partie Q_1 de Q contenue dans une portion P_1 de P est non dense dans P_1.

[1] Nous verrons plus loin qu'un ensemble parfait n'est pas dénombrable.

17. Q étant un ensemble contenu dans l'ensemble parfait P, nous dirons que Q *est de première catégorie dans* P, *s'il existe une infinité dénombrable d'ensembles non denses dans* P *tels que tout élément de* Q *fait partie de l'un d'eux.*

Si Q *n'est pas de première catégorie dans* P, *nous dirons que* Q *est de deuxième catégorie dans* P.

De ces définitions résultent immédiatement les conséquences suivantes:

Un ensemble contenu dans un ensemble de première catégorie est lui-même de première catégorie. Un ensemble contenant un ensemble de deuxième catégorie est lui-même de deuxième catégorie.

La réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie constitue un ensemble de première catégorie.

Si Q est de première catégorie dans P, la partie de Q contenue dans une portion quelconque P_1 de P est de première catégorie dans P_1.

Démontrons maintenant que, si Q est de première catégorie dans P, il existe, dans toute portion de P, des éléments de P qui ne font pas partie de Q. En effet, Q peut être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ Donnons-nous un groupe relatif à P, soit g_1; dans la portion $P_1 = D(P, g_1)$, nous pouvons, comme Q_1 est non dense dans P, trouver une portion P_2, déterminée par un groupe g_2, et ne contenant aucun élément de Q_1; de plus, nous pouvons supposer que l'ordre de g_2 est égal au moins à 2, car si cela n'est pas, nous remplaçons P_2 par une portion de P_2 déterminée par un groupe d'ordre 2; cela étant, comme Q_2 est non dense dans P, nous pouvons de même trouver, dans P_2, une portion P_3 déterminée par un groupe g_3 d'ordre au moins égal à 3, et ne contenant aucun élément de Q_2; en poursuivant l'application de ce procédé, on détermine une série infinie de groupes g_1, $g_2, g_3, \ldots g_n, \ldots$ qui sont tous relatifs à P, dont chacun est contenu dans le précédent, tels que l'ordre de g_n est au moins égal à n, et tels que $D(P, g_{n+1})$ ne contient aucun élément de Q_n. Il existe un élément contenu dans tous les groupes

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_n \geqq \cdots$$

puisque l'ordre de g_n croît indéfiniment avec n; si A est cet élément, A fait partie de P puisque tous ces groupes sont relatifs à P; enfin, d'après la propriété que g_{n+1} ne contient aucun élément de Q_n, A ne fait partie d'aucun Q_n, par conséquent ne fait pas partie de Q, ce qui démontre la proposition.

Ce résultat montre que l'ensemble parfait P n'est pas de première catégorie par rapport à lui-même; on reconnaît en particulier que P n'est pas dénombrable, car un ensemble dénombrable est de première catégorie.[1]

[1] On peut démontrer qu'un ensemble parfait de suites a la puissance du continu.

Il résulte aussi de là que, si Q est de première catégorie dans P, l'ensemble $P - Q$, complémentaire de Q, est de deuxième catégorie.

Dans certaines questions, nous aurons à considérer un ensemble Q_n contenu dans un ensemble parfait P, et variant avec l'indice n; s'il arrive que, quel que soit n, Q_n soit de première catégorie, l'ensemble Q formé par la réunion de tous les Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est aussi de première catégorie. Dans le cas où $n < n'$ entraîne $Q_n \leqq Q_{n'}$, nous dirons que Q est limite de Q_n pour $n = \infty$. De même, si on a un ensemble Q_ϱ variable dépendant d'un paramètre ϱ susceptible de prendre toutes les valeurs positives, et si $\varrho > \varrho'$ entraîne $Q_\varrho \leqq Q_{\varrho'}$, l'ensemble Q de tous les éléments qui appartiennent à Q_ϱ lorsque ϱ est suffisamment petit est appelé ensemble limite de Q_ϱ quand ϱ tend vers 0. Si, quel que soit ϱ, Q_ϱ est de première catégorie, il en est de même de Q.

CHAPITRE III.

Les fonctions définies sur les ensembles de suites.

18. Etant donné un ensemble P de suites, si nous faisons correspondre à chaque élément de cet ensemble un nombre réel, nous dirons que l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur l'ensemble P. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'étendre aux fonctions nouvelles ainsi définies la plupart des notions et des résultats obtenus dans les »Leçons, etc.» et la première partie de ce travail (chapitres I, III, IV) pour les fonctions de n variables. Pour concevoir la possibilité de cette extension, il suffit de remarquer que la théorie des fonctions de n variables a pour base fondamentale la notion de point limite d'une suite de points, notion qui est remplacée, dans la théorie actuelle, par celle d'élément-suite limite d'une suite d'éléments-suites.

Considérons un ensemble *fermé* P de suites; soit f une fonction définie sur P, en supposant, pour prendre le cas général, que f puisse recevoir toutes les valeurs réelles et les valeurs $+\infty$, $-\infty$, en d'autres termes, toutes les valeurs de l'ensemble désigné par R' (Première partie, § 1). Nous dirons que *f est continue pour l'élément A de P si, $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ étant une suite quelconque d'éléments de P ayant pour limite A, la suite de nombres: $f(A_1), f(A_2), \ldots f(A_\nu), \ldots$ a pour limite $f(A)$.* Si f est continue en chacun des éléments de P, nous dirons que f est continue sur P; si Q est un ensemble fermé contenu dans P, il est

évident que f est continue sur Q. Une fonction f est limite d'une suite de fonctions: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ si, quel que soit l'élément A de l'ensemble fermé P où ces fonctions sont définies, on a: $\lim f_n(A) = f(A)$.

19. L'ensemble des fonctions continues sur P constitue la classe o de fonctions. Une fonction f définie sur P est dite de classe α, α étant un nombre ordinal des classes I ou II, si elle n'appartient pas à une classe d'indice $< \alpha$, et si elle est limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ dont chacune appartient à une classe $< \alpha$. En appelant E l'ensemble des fonctions de toutes les classes marquées par les nombres α des classes I ou II, le raisonnement du § 1 (Première partie) s'applique au cas actuel, et montre que E contient toutes ses fonctions limites.

D'ailleurs, on conçoit qu'un grand nombre de raisonnements faits pour le cas où l'on part d'un ensemble à n dimensions peuvent être immédiatement transposés à la théorie actuelle. Nous nous contenterons d'énoncer sans démonstration les résultats pour lesquels il est évident que cette transposition ne présente aucune difficulté, et nous détaillerons au contraire les démonstrations qui présentent des différences sensibles avec les cas étudiés précédemment. C'est ainsi qu'on reconnaît tout de suite que les raisonnements des § 2, 3, 4 de la première partie s'appliquent aux fonctions définies sur un ensemble fermé P de suites, et permettent d'énoncer les résultats suivants:

Une fonction f de classe $\leqq \alpha$, bornée, peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ *chacune d'elles étant comprise entre les mêmes limites que* f (ou même entre des limites plus rapprochées que celles de f).

L'étude des fonctions non bornées, pouvant même recevoir des valeurs infinies, peut se ramener, par une transformation convenable, à l'étude des fonctions bornées.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions de classes $\leqq \alpha$ est une fonction de classe $\leqq \alpha$. Une fonction de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha > 0)$ est la somme d'une série, convergente pour chaque élément A de P, et dont les termes sont des fonctions de classes $< \alpha$.

20. Etant donnée une série dont les termes sont des fonctions définies sur l'ensemble fermé P, soit

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots,$$

nous dirons que cette série est uniformément convergente sur P si elle converge pour chaque élément et si, quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit l'entier h, il y a un entier $n > h$ tel que pour tout élément A de P, on a;

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots| < \varepsilon.$$

Je dis que *si les u_n sont des fonctions de classes $\leq \alpha$, la somme f est aussi de classe $\leq \alpha$;* il suffit, pour le voir, de reprendre les raisonnements du § 3 de la première partie. On montre d'abord que, par un groupement de termes consécutifs convenablement effectué, la série (1) peut être remplacée par une autre dont les termes, à partir du second, sont moindres en valeur absolue que ceux d'une série convergente à termes positifs numériques choisie à l'avance; les termes de cette nouvelle série sont de classes $\leq \alpha$, comme ceux de la première. Tout est ramené à montrer qu'étant donnée une série:

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont les termes sont des fonctions de classes $\leq \alpha$, et une série à termes positifs numériques convergente

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

telle qu'on ait, pour tout élément A de P et quel que soit n:

$$|u_n| < a_n.$$

la somme f de (1) est de classe $\leq \alpha$.

Or, en supposant $\alpha > 0$, u_n peut être considéré comme la limite d'une suite

$$u_{n,1}, \ u_{n,2}, \ldots u_{n,p}, \ldots$$

les $u_{n,p}$ étant de classes $< \alpha$ et tels que:

$$|u_{n,p}| \leq a_n.$$

On vérifie alors que la fonction

$$f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \cdots + u_{i,i}$$

qui est de classe $< \alpha$, a pour limite f.

Le raisonnement suppose $\alpha > 0$. Le théorème a lieu aussi pour $\alpha = 0$ et s'énonce ainsi: *Une série uniformément convergente de fonctions continues sur un ensemble fermé P représente une fonction continue sur P.* En effet, supposons que les termes u_n de (1) soient continus sur P. Soit A un élément de P, soit A_1, $A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ une suite d'éléments de P ayant pour limite A. Donnons-nous un nombre positif ε; nous pouvons, par hypothèse, trouver n tel que, si on pose $f_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, on ait, pour tous les éléments de P:

$$|f_n - f| < \varepsilon.$$

On a donc:

$$|f(A) \quad f_n(A)| < \varepsilon, \qquad |f(A_\nu) - f_n(A_\nu)| < \varepsilon.$$

La fonction f_n est continue en A; donc, quand ν dépasse une certaine valeur, on a:

$$|f_n(A_\nu) - f_n(A)| < \varepsilon,$$

d'où, en combinant les trois dernières inégalités:

$$|f(A_\nu) - f(A)| < 3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, cela montre que $f(A_\nu)$ tend vers $f(A)$. Donc f est continue sur P.

Du théorème général qui vient d'être démontré sur les séries uniformément convergentes résulte l'importante conséquence que voici :

Pour démontrer qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq \alpha$, il suffit de démontrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, f diffère de moins de ε d'une fonction de classe $\leqq \alpha$.

21. Pour étudier de plus près les fonctions des différentes classes définies sur les ensembles de suites, nous commencerons par leur étendre les notions de maximum, minimum, oscillation, étudiées au commencement du chapitre III de la première partie.

Soit P un ensemble *quelconque* de suites, sur lequel est définie une fonction f. Si g est un groupe relatif à P, l'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de P contenus dans g a une borne supérieure, une borne inférieure, une oscillation, que nous désignons respectivement par:

$$M(f, P, g), \quad m(f, P, g), \quad \omega(f, P, g)$$

et l'on a:

$$\omega(f, P, g) = M(f, P, g) - m(f, P, g) \geqq 0.$$

Si g' est un groupe relatif à P et contenu dans g, on a évidemment:

$$M(f, P, g) \geqq M(f, P, g') \qquad m(f, P, g) \leqq m(f, P, g').$$

Soit maintenant A un élément de P^0; les groupes d'ordre 1, 2, ... qui contiennent A, sont tous relatifs à P; si on désigne par $g_1, g_2, \dots g_n, \dots$ soit ces groupes, soit plus généralement, une suite quelconque de groupes contenant A et d'ordres croissants, on a:

$$(1) \qquad M(f, P, g_1) \geqq M(f, P, g_2) \geqq \cdots \geqq M(f, P, g_n) \geqq \cdots$$

La suite de nombres (1) a une limite déterminée, qui ne dépend que de A; nous la désignerons par $M(f, P, A)$ et nous dirons que c'est le *maximum de f sur P en A*.

Si A est un élément appartenant à un groupe g, on a:

$$M(f, P, A) \leqq M(f, P, g).$$

On définit de même le minimum de f en A, soit $m(f, P, A)$, et l'oscillation de f en A:

$$\omega(f, P, A) = M(f, P, A) - m(f, P, A).$$

Nours dirons que f est continue ou discontinue en A par rapport à P suivant que le nombre $\omega(f, P, A)$ est nul ou positif; cette définition est évidemment en accord avec la définition de la continuité donnée pour les ensembles fermés au § 18.

22. Si l'on a, en un élément A de P:

$$M(f, P, A) = f(A), \tag{1}$$

la fonction f a en A la propriété suivante: quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un groupe contenant A tel que, pour tout élément A' de P contenu dans ce groupe, on a:

$$f(A') < f(A) + \varepsilon;$$

et réciproquement, cette propriété, si elle existe, entraîne la condition (1). Nous dirons que dans ce cas, *f est semi-continue supérieurement en A;* si une fonction f définie sur un ensemble *fermé* P possède en chaque élément de P la semi-continuité supérieure, nous dirons que f est semi-continue supérieurement sur P.

La semi-continuité inférieure en A se définit de même par la condition:

$$m(f, P, A) = f(A).$$

Une fonction qui possède en A les deux semi-continuités est continue en cet élément.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement en A relativement à P possède aussi la même propriété.

Si f est semi-continue supérieurement en A, $-f$ est semi-continue inférieurement.

Si f définie sur l'ensemble fermé P est semi-continue supérieurement sur P, l'ensemble Q des éléments de P où $f \geqq \alpha$, α étant un nombre quelconque, est fermé. Car, si A est un élément de P limite pour la suite d'éléments de P:

$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ et si on a, quel que soit n: $f(A_n) \geqq \alpha$, on a en A: $M(f, P, A) \geqq \alpha$, et par suite: $f(A) = M(f, P, A) \geqq \alpha$.

Nous pouvons établir tout de suite qu'une fonction f semi-continue supérieurement sur un ensemble fermé P, est de classe $\leqq 1$. Il faut pour cela définir une suite de fonctions continues sur P: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ telle qu'on ait, en tout élément A de P: $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$. Nous prendrons pour f_n la fonction qui, pour chaque groupe g d'ordre n relatif à P, a en tous les éléments de P contenus dans ce groupe, la valeur $M(f, P, g)$; une telle fonction est bien continue en chaque élément A de P, car si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ est une suite tendant vers A, A_ν est, pour ν assez grand, contenu dans le même groupe d'ordre n que A, et l'on a alors: $f_n(A_\nu) = f_n(A)$. D'autre part, on a bien, quel que soit A: $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$, car en désignant par g_n le groupe d'ordre n qui contient A, et tenant compte de ce que: $f(A) = M(f, P, A)$, cette égalité se réduit à la suivante:

$$\lim_{n=\infty} M(f, P, g_n) = M(f, P, A),$$

laquelle est la définition même de $M(f, P, A)$.

En outre, d'après la définition de f_n, on a en tout élément A: $f_n(A) \geqq f_{n+1}(A)$, de sorte que la suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ ne va jamais en croissant. Réciproquement, soit une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ telle qu'en tout élément A on ait:

$$f_n(A) \geqq f_{n+1}(A).$$

Cette suite a nécessairement une limite f; je dis que f est semi-continue supérieurement. En effet, soit A un élément, soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver p entier tel que:

$$f_p(A) < f(A) + \varepsilon.$$

Comme f_p est continue, on peut trouver un groupe g contenant A tel que, pour tout élément A' de g contenu dans g, on ait:

$$f_p(A') < f_p(A) + \varepsilon.$$

On a alors:

$$f(A') \leqq f_p(A') < f_p(A) + \varepsilon < f(A) + 2\varepsilon.$$

La condition $f(A') < f(A) + 2\varepsilon$ indique que f est semi-continue supérieurement.[1]

[1] Le résultat peut s'énoncer ainsi: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit représentable par une série à termes continus et tous négatifs à partir d'un certain rang est qu'elle soit semi-continue supérieurement. Cf. R. Baire, *Sur les séries à termes continus et tous de même signe*, Bulletin de la Société Math. 1904

Le raisonnement s'applique en particulier à des fonctions que nous rencontrerons à plusieurs reprises, et qui seront définies comme il suit. A chaque groupe g relatif à un ensemble fermé P est attaché un nombre $\varphi(g)$, tel que si g' est contenu dans g, on a: $\varphi(g') \leq \varphi(g)$; la valeur de la fonction f en chaque élément A de P est la limite pour $n = \infty$ de $\varphi(g_n)$, g_n étant le groupe d'ordre n qui contient A. On reconnaît qu'une telle fonction est limite de la fonction continue f_n égale en tous les éléments de P d'un groupe g d'ordre n à $\varphi(g)$, la limite étant toujours atteinte par valeurs non croissantes. Donc f est semi-continue supérieurement.

23. Reprenons le cas d'une fonction f quelconque définie sur un ensemble *quelconque* P; nous avons attaché (§ 21), à chaque groupe g relatif à P, le nombre $M(f, P, g)$, borne supérieure des valeurs de f aux différents éléments de P contenus dans g, et nous avons défini, en chaque élément A de P^0, le nombre $M(f, P, A)$, limite de $M(f, P, g)$, quand g est un groupe contenant A dont l'ordre croît indéfiniment. Si nous considérons la fonction φ définie en chaque élément A de P^0 par la condition d'être égale à $M(f, P, A)$, φ rentre dans la catégorie de fonctions définie au § précédent: donc φ *est semi-continue supérieurement.*

De même, $\psi = m(f, P, A)$ *est semi-continue inférieurement.*

La fonction $\omega = \varphi - \psi$, somme de φ et $-\psi$, *est semi-continue supérieurement.* Il en résulte que l'ensemble des éléments de P^0 où l'on a: $\omega(f) \geq \sigma$, σ étant positif, est *fermé.*

24. Considérons maintenant une fonction f définie en tous les éléments d'un ensemble *parfait* P. En chaque élément de P existe une valeur pour l'oscillation $\omega(f)$, qui définit le degré de discontinuité de f en cet élément. Nous distinguerons les fonctions f en deux sortes.

1° Quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des éléments où $\omega \geq \sigma$ est *non dense* dans P. Alors l'ensemble des éléments de discontinuité est de première catégorie: dans toute portion de P existent des points de continuité pour f; $\omega(f)$ a son minimum nul en tout élément, et dans toute portion. On dit que f est *ponctuellement discontinue sur* P.

2° Si non, il existe une portion P_1 de P et un nombre positif σ tel qu'en tout élément de P_1, on a $\omega(f) \geq \sigma$. Nous dirons que f *est totalement discontinue.*

D'après ces définitions, pour que f soit ponctuellement discontinue, il faut et il suffit que $\omega(f)$ ait son minimum nul en tout élément. Une fonction continue rentre dans la catégorie des fonctions ponctuellement discontinues.

25. Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit de classe ≤ 1 est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P.*

Nous nous contenterons, pour la démonstration de ce théorème, de considérer des fonctions *bornées*, l'extension du résultat au cas général se faisant exactement comme pour le cas des fonctions de n variables (Première partie, § 13, et Leçons sur les fonctions discontinues).

Pour montrer que la condition est nécessaire, je vais démontrer qu'il y a contradiction à admettre l'existence d'un ensemble parfait H sur lequel on aurait une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ tendant vers une fonction f ($f_1, f_2, \dots f_n, \dots f$ étant *bornées*), le minimum de l'oscillation de f aux différents éléments de H étant *positif*.

Soit en effet 2λ un nombre positif inférieur à ce minimum: dans toute portion H' de H, on a:

$$\omega(f, H') > 2\lambda. \tag{1}$$

Soit μ un nombre positif inférieur à λ; posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{2}$$

Soit enfin p un entier positif.

Partons d'une portion H' quelconque de H, déterminée par un groupe g'; soit A_0 un élément de H'. Comme $f_n(A_0)$ tend, pour $n=\infty$, vers $f(A_0)$, on peut prendre $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

La fonction f_α est continue sur H; on peut donc trouver un groupe g_1 contenant A_0, contenu dans g', tel que si A est un élément quelconque de la portion H_1 de H déterminée par g_1, on ait:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

D'après (1), l'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de H_1 a une oscillation supérieure à 2λ; il y a donc, dans cette portion (Leçons sur les fonctions discontinues, p. 80), un élément A_1 tel que:

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{5}$$

On peut ensuite trouver $\beta > p$ tel que:

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon, \tag{6}$$

et enfin, à cause de la continuité de f_β, on peut trouver un groupe g_2 contenant

A_1, contenu dans g_1, tel que si A est un élément quelconque de la portion H_2 déterminée par g_2, on ait:

$$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Comme H_2 fait partie de H_1, pour tout élément A de H_2 on a, en combinant (3), (4), (5), (6), (7):

$$|f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu \tag{8}$$

et par suite:

$$\omega[f_{p+1}(A),\ f_{p+2}(A), \ldots] > \mu. \tag{9}$$

En résumé, p étant donné, toute portion H' de H contient une portion dont tous les éléments satisfont à (9): c'est dire que l'ensemble K_p des éléments de H qui ne satisfont pas à (9) est *non dense* dans H; l'ensemble K, limite de K_p quand on donne à p successivement toutes les valeurs entières 1, 2, ..., est *de première catégorie;* il y a donc des éléments qui ne font pas partie de K; un tel élément, soit A, satisfait à (9), quel que soit p, ce qui contredit l'hypothèse que $f_n(A)$ a une limite finie.

26. Il reste à montrer que la condition du théorème I est suffisante. D'après la conclusion du § 20, il suffit pour cela de faire voir que si f est une fonction définie sur l'ensemble fermé P, ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, étant donné $\sigma > 0$, il est possible de définir sur P une fonction F différant de f de moins de σ, et qui soit de classe $\leqq 1$. Nous ramènerons d'autre part la construction d'une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers F au problème suivant: Attacher à chaque groupe g relatif à P un nombre $\varphi(g)$, de telle manière que si A est un élément de P, et si g_n est le groupe d'ordre n qui contient A, on ait: $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(g_n) = F(A)$. Si en effet on suppose ce problème résolu, et si on appelle f_n la fonction qui, pour tous les éléments de P contenus dans un même groupe d'ordre n, soit g, a la valeur $\varphi(g)$, on reconnaît que f_n est continue et a pour limite F. Ainsi tout revient à définir la fonction F et les nombres $\varphi(g)$ de manière à vérifier les conditions précédentes.

Définissons des ensembles P_α correspondant aux différents nombres ordinaux $\leqq \Omega$ comme il suit:

1° $P_0 = P$.

2° Si α est de première espèce, P_α est l'ensemble des éléments A de l'ensemble parfait $P^\Omega_{\alpha-1}$ pour lesquels:

$$\omega(f,\ P^\Omega_{\alpha-1},\ A) \geqq \sigma.$$

D'après l'hypothèse que f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, si $P_{\alpha-1}^{\Omega}$ existe, P_α est *non dense* dans $P_{\alpha-1}^{\Omega}$, donc $P_\alpha < P_{\alpha-1}$.

3° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble des éléments communs aux ensembles dont l'indice est inférieur à α.

Les ensembles P_α sont ainsi parfaitement définis; ils satisfont évidemment aux conditions du § 14, y compris les conditions complémentaires 1° et 2°. On a donc, en désignant par P_Ω l'ensemble commun à tous les P_α:

$$P = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega \qquad \gamma < \Omega$$

et P_Ω est parfait ou nul.

Mais je dis que P_Ω ne peut pas exister, car pour un certain nombre $\beta < \Omega$ on a:

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \cdots = P_\Omega.$$

Or, nous avons vu plus haut que $P_\beta > 0$ entraine $P_{\beta+1} < P_\beta$. Ainsi $P_\Omega = 0$ et l'on a:

$$P = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) \qquad \gamma = 0, 1, 2, \ldots$$

On a d'autre part, pour une valeur déterminée quelconque de γ:

$$\begin{aligned} P_\gamma - P_{\gamma+1} &= (P_\gamma - P_\gamma^\Omega) + (P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}) \\ &= \Sigma(P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}) + P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1} \qquad \nu = 0, 1, \cdots < \Omega. \end{aligned}$$

En résumé, tout élément A de P fait partie, ou bien d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, ou bien d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$, et cela d'une manière bien déterminée.

En un élément A qui fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, posons: $F(A) = f(A)$.

En un élément A qui fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$, posons: $F(A) = m(f, P_\gamma^\Omega, A)$. Comme on a, en cet élément: $\omega(f, P_\gamma^\Omega, A) < \sigma$, il en résulte:

$$|f(A) - F(A)| < \sigma.$$

Cette inégalité a donc lieu pour tous les éléments de P.

Soit maintenant g un groupe relatif à P; nous allons définir $\varphi(g)$. Pour cela, désignons par $Q_{\gamma,\nu} (\gamma < \Omega, \nu \leq \Omega)$ l'ensemble des éléments de P_γ^ν contenus dans g.[1] Les ensembles Q sont des ensembles fermés ordonnés comme les ensembles P correspondants; convenons de dire que l'ensemble $Q_{\gamma,\nu}$ a pour *suivant immédiat*

[1] On reconnaît facilement que $Q_{\gamma,\nu} = Q_\gamma^\nu$, ce qui n'a pas lieu nécessairement dans le cas des ensembles de points à n dimensions.

l'ensemble $Q_{\gamma,\nu+1}$ si $\nu < \Omega$, l'ensemble $Q_{\gamma+1,0}$ si $\nu = \Omega$; il est évident que si un ensemble est nul, son suivant l'est aussi.

Parmi les ensembles $Q_{\gamma,\nu}$ qui ne sont pas nuls, il n'y en a pas nécessairement un dont le suivant soit nul; il y a d'ailleurs au plus un ensemble remplissant cette condition. Si cela a lieu, soit $Q_{h,k}$ cet ensemble, qui contient effectivement des éléments, tandis que son suivant n'en contient pas. Nous poserons:

$$\varphi(g) = m(f, Q_{h,k}).$$

Si cela n'a pas lieu, nous prendrons pour $\varphi(g)$ un nombre quelconque, par exemple une valeur constante choisie une fois pour toutes à l'avance.

Démontrons que la fonction F et les nombres $\varphi(g)$ satisfont aux conditions requises. Pour cela, soit A un élément de P; distinguons deux cas:

1° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$; A est isolé dans P_γ^ν; nous pouvons déterminer un groupe g' contenant A et ne contenant aucun autre élément de P_γ^ν; si g_n est le groupe d'ordre n contenant A, g_n est, pour n assez grand, contenu dans g', g_n contient alors un seul élément de P_γ^ν, à savoir A; de sorte que, pour g_n, $Q_{\gamma,\nu}$ existe et se réduit à A, l'ensemble suivant $Q_{\gamma,\nu+1}$ est nul. On a alors:

$$\varphi(g_n) = m(f, Q_{\gamma,\nu}) = f(A) = F(A).$$

La condition cherchée est donc obtenue.

2° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. On a posé:

$$F(A) = m(f, P_\gamma^\Omega, A).$$

La fonction $m(f, P_\gamma^\Omega, A)$, considérée sur l'ensemble parfait P_γ^Ω, est semi-continue inférieurement; si on se donne $\varepsilon > 0$, on peut trouver un groupe g contenant A tel qu'en tout élément A' de P_γ^Ω contenu dans g, on ait:

$$m(f, P_\gamma^\Omega, A') > m(f, P_\gamma^\Omega, A) - \varepsilon.$$

On peut, d'autre part, remplacer, s'il y a lieu, g par un groupe g' contenant A, contenu dans g et ne contenant aucun élément de $P_{\gamma+1}$, puisque A ne fait pas partie de l'ensemble *fermé* $P_{\gamma+1}$.

Cela étant, si g_n contenant A est contenu dans g', l'ensemble $Q_{\gamma,\Omega}$ relatif à g_n existe et contient A, tandis que l'ensemble suivant $Q_{\gamma+1,0}$ est nul. On a donc, pour n assez grand,

$$\varphi(g_n) = m(f, Q_{\gamma,\Omega}),$$

et ce nombre est compris entre les nombres $m(f, P_\gamma^\Omega, A)$ et $m(f, P_\gamma^\Omega, A) - \varepsilon$, c'est-à-dire entre $F(A)$ et $F(A) - \varepsilon$. Donc la condition requise est encore réalisée.

Le théorème I est ainsi démontré.

27. Il résulte de ce théorème que si une fonction définie sur un ensemble fermé n'est pas de classe ≤ 1, il existe un ensemble parfait H et un nombre positif λ tel qu'en tout point de H, l'oscillation de f par rapport à H est $\geq \lambda$.

Par suite, *pour montrer qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe ≤ 1, il suffit de montrer que si H est un ensemble parfait quelconque contenu dans P, il y a une portion H_1 de H sur laquelle f est de classe ≤ 1.*

Soient les deux fonctions: f_1 définie sur un ensemble fermé P_1 et de classe ≤ 1, f_2 définie sur un ensemble fermé P_2 et de classe ≤ 1; la fonction f définie sur l'ensemble fermé $M(P_1, P_2)$ par la condition d'être égale à f_1 pour tout élément de P_1, et à f_2 pour tout élément de P_2 n'appartenant pas à P_1, sera dite obtenue par la superposition de f_1 à f_2. Je dis que f est de classe ≤ 1; en effet, soit H un ensemble parfait quelconque contenu dans $M(P_1, P_2)$; posons: $H_1 = D(H, P_1)$; si H_1 coïncide avec H, f est identique sur H à f_1 et est de classe ≤ 1; sinon, il y a une portion K de H qui ne contient aucun élément de H_1, par suite de P_1; sur cette portion K, f est identique à f_2, donc est de classe ≤ 1.

Le résultat s'étend immédiatement au cas de p fonctions superposées.

28. Comme dans le cas des fonctions de n variables réelles, il y a lieu de considérer une fonction définie sur un ensemble *quelconque* P, et de rechercher à quelles conditions il est possible d'achever la définition de f aux éléments de $P^0 - P$, de manière à avoir une fonction qui soit de classe 0 ou 1 sur l'ensemble fermé P^0. L'extension des méthodes employées au § 18 de la première partie ne présente aucune difficulté. Etant donnée une fonction f définie partiellement sur un ensemble parfait H, c'est-à-dire définie seulement aux éléments d'un ensemble K contenu dans H, il y a, en chaque élément A de K^0, une valeur déterminée pour l'oscillation $\omega(f, H, A)$ de f relativement à H. Si l'ensemble des éléments pour lesquels cette oscillation est $\geq \sigma$, σ étant un nombre positif quelconque, est *non dense* dans H, nous dirons que f est *ponctuellement discontinue sur H;* dans le cas contraire, f sera totalement discontinue. Cela étant, on démontrera, comme dans la première partie, que: *pour que f définie sur P quelconque soit de classe ≤ 1, il faut et il suffit que f soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P^0.*

29. Nous allons maintenant étendre aux ensembles de suites la théorie qui fait l'objet du chapitre IV de la première partie.

Soit f une fonction définie sur un ensemble parfait P. Les nombres λ tels que l'ensemble des éléments de P où $f > \lambda$ est de première catégorie dans P ont

une borne inférieure, soit $M'(f, P)$; l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P) - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie dans P, tandis que l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P) + \varepsilon$ est de première catégorie, ainsi par suite que l'ensemble des éléments où $f > M'(f, P)$, qui est limite du précédent quand ε tend vers o. Il y a de même un nombre déterminé $m'(f, P)$ tel que l'ensemble des éléments où $f < m'(f, P) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie, tandis que l'ensemble des éléments où $f < m'(f, P)$ est de première catégorie.

On a évidemment:

$$M'(f, P) \leqq M(f, P), \quad m'(f, P) \geqq m(f, P).$$

Je dis que $M'(f, P) \geqq m'(f, P)$. En effet, l'ensemble des éléments où $f > M'$ étant de première catégorie, l'ensemble des éléments où $f \leqq M'$, qui est son complémentaire, est de deuxième catégorie, d'où résulte que M' est au moins égal à m'.

Nous poserons:

$$\omega'(f, P) = M'(f, P) - m'(f, P) \geqq 0.$$

Il est évident que, si Q est un ensemble de première catégorie dans P, on peut faire complètement abstraction des valeurs de f aux éléments de Q dans la définition des nombres $M'(f, P)$, $m'(f, P)$, $\omega'(f, P)$.

Si P_1 est une portion de P, comme tout ensemble de première catégorie dans P est tel que la partie de cet ensemble contenue dans P_1 est de première catégorie dans P_1, on en déduit que:

$$M'(f, P_1) \leqq M'(f, P), \quad m'(f, P_1) \geqq m'(f, P), \quad \omega'(f, P_1) \leqq \omega'(f, P).$$

30. Dans les mêmes conditions, soit A un élément de P; en désignant par P_n la portion de P déterminée par le groupe g_n d'ordre n contenant A, on voit que, quand n augmente, $M'(f, P_n)$ que nous écrirons aussi $M'(f, P, g_n)$ ne peut croître; donc ce nombre a, pour $n = \infty$, une limite, que je désigne par $M'(f, P, A)$. Soit $\varphi'(A)$ la fonction égale, en tout élément de A, à $M'(f, P, A)$; la fonction φ' est obtenue dans les conditions du § 22: elle est donc semi-continue supérieurement.

Je dis que *l'ensemble H des éléments où $f > \varphi'$ est de première catégorie.* En effet, soit g un groupe relatif à P; l'ensemble des éléments de P contenus dans g où $f > M'(f, P, g)$ est de première catégorie dans P; soit $K(g)$ cet ensemble. En considérant tous les groupes g relatifs à P (en nombre infini *dénombrable*), et désignant par K la réunion des ensembles $K(g)$, K est de première catégorie.

Il est évident que tout élément de K fait partie de H; je dis que réciproquement tout élément A de H fait partie de K; en effet, on a, en A:

$$f(A) > \varphi'(A) = M'(f, P, A);$$

on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que:

$$f(A) > \varphi'(A) + \varepsilon;$$

on peut d'autre part trouver un groupe g contenant A tel qu'on ait:

$$M'(f, P, g) < \varphi'(A) + \varepsilon;$$

on a donc:

$$f(A) > M'(f, P, g);$$

donc A fait partie de $K(g)$ et par suite de K. Ainsi l'ensemble H des éléments où $f > \varphi'$, est identique à K, et par suite de première catégorie.

On définit d'une manière analogue en chaque élément A la fonction semi-continue inférieurement $\psi'(A) = m'(f, P, A)$; c'est la limite de $m'(f, P, g_n)$ pour $n = \infty$, g_n étant le groupe d'ordre n contenant A. L'ensemble des éléments où $f < \psi'$ est de première catégorie.

La fonction $\omega'(f, P, A) = \varphi' - \psi' \geqq 0$ est semi-continue supérieurement.

Si une fonction f définie sur P parfait satisfait, en tout élément A de P, à la condition:

$$m(\omega'(f)) = 0,$$

quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble fermé des éléments où $\omega'(f) \geqq \sigma$, est *non dense* dans P, donc l'ensemble des éléments où $\omega' = \varphi' - \psi' > 0$ est de première catégorie. En désignant par II la réunion des trois ensembles d'éléments, tous de première catégorie, pour lesquels on a l'une des inégalités:

$$f > \varphi', \qquad f < \psi', \qquad \varphi' > \psi',$$

on voit qu'on a, en tout élément A de $P - II$:

$$f \leqq \varphi', \qquad f \geqq \psi', \qquad \varphi' = \psi',$$

d'où:

$$f = \varphi' = \psi'.$$

D'après les propriétés de semi-continuité appartenant à φ' et ψ', on voit que f a en A la propriété suivante: Quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un groupe g contenant A tel que si A' est un élément quelconque de $P - II$ contenu dans g, on a:

$$f(A) - \varepsilon < f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

On exprimera cette propriété en disant que *f est, en A, continue par rapport à $P - \Pi$.*

On voit aussi qu'*il existe une fonction de classe ≤ 1 telle que f n'en diffère qu'aux éléments d'un ensemble de première catégorie.*

31. Je dis que *la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite,* c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ définies sur P parfait a une limite f et si on a, quel que soit i: $m(\omega'(f_i)) = 0$ en tout élément de P, on a aussi $m(\omega'(f)) = 0$ en tout élément de P. Je vais montrer pour cela qu'il y a contradiction à admettre que la fonction $\omega'(f)$ relative à P ait son minimum *positif.* (Je suppose la fonction f *bornée.*)

Soit 2λ un nombre positif inférieur à ce minimum; dans toute portion P' de P, on a:

$$M'(f, P') - m'(f, P') > 2\lambda. \tag{1}$$

Soit μ un nombre positif inférieur à λ; posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon. \tag{2}$$

Désignons par Π_i l'ensemble des éléments de P où l'on n'a pas:

$$f_i = \varphi'(f_i) = \psi'(f_i).$$

Soit $\Pi = M(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n, \ldots)$. L'ensemble Π est de première catégorie dans P, et en tout élément A de $P - \Pi$, quel que soit i, f_i est continue par rapport à $P - \Pi$.

Soit p un entier. Partons d'une portion P' quelconque de P, déterminée par un groupe g'; soit A_0 un élément de $P - \Pi$ contenu dans P'. Comme $\lim_{n=\infty} f_n(A_0) = f(A_0)$, il y a $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

f_α est continue en A_0 par rapport à $P - \Pi$. On peut donc trouver un groupe g_1 contenant A_0, contenu dans g', tel que si A est un élément quelconque de $P - \Pi$ contenu dans g_1, on a:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

L'ensemble des valeurs de f aux différents éléments de $P - \Pi$ contenus dans g_1 a des bornes supérieure et inférieure entre lesquelles, d'après une remarque du § 29, se trouvent compris les nombres $M'(f, P, g_1)$ et $m'(f, P, g_1)$, dont la diffé-

rence surpasse 2λ, d'après (1); donc l'oscillation de cet ensemble de valeurs surpasse 2λ. Il y a donc certainement un élément A_1 de $P - \Pi$ contenu dans g_1 tel que:

(5) $$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon.$$

On peut trouver $\beta > p$ tel que:

(6) $$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon,$$

et enfin, à cause de la continuité de f_β en A_1 par rapport à $P - \Pi$, on peut trouver un groupe g_2 contenant A_1, contenu dans g_1 et tel que si A est un élément quelconque de $P - \Pi$ contenu dans g_2, on a:

(7) $$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon.$$

A satisfait aussi alors à (4), et les inégalités (3), (4), (5), (6), (7) donnent, pour tout élément A de $P - \Pi$ contenu dans g_2:

(8) $$\omega[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots] > \mu.$$

Ainsi, p étant donné, toute portion P' de P contient une portion dont tous les éléments, s'ils n'appartiennent pas à Π, satisfont à (8), c'est-à-dire que l'ensemble K_p des éléments ne satisfaisant pas à (8) ne contient, outre des éléments de Π, qu'un ensemble *non dense;* donc *K_p est de première catégorie, et il en est de même de* $K = M(K_1, K_2, \ldots)$. Il y a des éléments non contenus dans K; un tel élément, soit A, satisfait à (8), quel que soit p, ce qui contredit le fait que $f_n(A)$ a une limite finie.

Il est ainsi démontré que *la condition* $m(\omega'(f)) = 0$ *se conserve à la limite. Cette propriété,* évidemment vérifiée par les fonctions de classe 0, *appartient donc à toutes les fonctions de l'ensemble E.*

CHAPITRE IV.

Relations entre les ensembles de points et les ensembles de suites.

32. Les deux derniers chapitres ont mis en évidence l'analogie profonde qui existe entre les deux notions d'ensemble de points dans l'espace à n dimensions et d'ensemble de suites d'entiers; cette analogie résulte entièrement, comme nous l'avons indiqué au début, de ce que, dans l'une et l'autre théorie, les ques-

tions traitées sont des conséquences plus ou moins lointaines de la seule notion fondamentale de limite. Rappelons à ce sujet que, en restant dans le cas des ensembles à n dimensions, une première généralisation avait consisté à étendre aux ensembles parfaits quelconques les résultats établis d'abord dans le cas des ensembles continus.[1]

Il est utile maintenant de signaler quelques différences entre les trois notions d'ensemble continu, d'ensemble parfait non continu, et d'ensemble de suites d'entiers.

33. Prenons, comme type d'ensemble continu, le segment linéaire $(0, 1)$; *il est impossible de partager cet ensemble en deux ensembles fermés;* car, si P et Q sont deux ensembles fermés sans point commun, on démontre[2] que la distance d'un point de P à un point de Q ne descend pas au dessous d'un certain nombre positif α; si A appartient à P, B à Q, il est impossible de trouver entre A et B des points intermédiaires $C_1, C_2, \ldots C_h$, appartenant tous à P ou Q et tels que, dans l'ensemble $(A, C_1, C_2, \ldots C_h, B)$, la distance de deux points consécutifs soit inférieure à α; tandis que si A et B appartiennent au segment $(0, 1)$, il est possible de trouver un nombre fini de points appartenant au segment et remplissant cette condition: donc il ne peut y avoir identité entre le segment et l'ensemble $P + Q$.[3]

Au contraire, un ensemble parfait linéaire non dense dans le continu peut être partagé en deux ou en un nombre fini quelconque d'ensembles parfaits; cela résulte, par exemple, de l'étude faite aux § 1 et 2.

Ce caractère appartient aussi aux ensembles de suites d'entiers, d'après les définitions du Chapitre II. Car, si P est un ensemble parfait de suites, pour n assez grand, les groupes d'ordre n relatifs à P sont en nombre au moins égal à 2; soient $g, g', \ldots$ ces groupes; les ensembles $D(P, g)$, $D(P, g'), \ldots$ sont parfaits, n'ont deux à deux aucun élément commun, et leur réunion constitue l'ensemble P.

34. On voit en outre que, si $g, g', \ldots$ sont en nombre infini (nécessairement dénombrable), P se trouve décomposé en une *infinité* d'ensembles parfaits, soit $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$

De plus, la réunion d'un ensemble quelconque d'ensembles pris parmi $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$ constitue un ensemble parfait (et par suite fermé).

Enfin, ce procédé de décomposition d'un ensemble fermé de suites en une infinité d'ensembles partiels tous fermés peut se poursuivre indéfiniment, du moins pour certains ensembles. C'est ainsi, par exemple, que l'ensemble fondamental

[1] cf. Leçons sur les fonctions discontinues, chapitre IV.

[2] cf. par ex, Jordan, Cours d'Analyse.

[3] On sait que les ensembles continus qui sont dans les mêmes conditions que le segment $(0, 1)$ dans cette étude sont dits *d'un seul tenant.*

des suites d'entiers (§ 7), qui est parfait, se décompose en une infinité dénombrable d'ensembles partiels qui sont parfaits, à savoir les groupes du premier ordre (1), (2), ..., chacun d'eux se décompose également à son tour en une infinité d'ensembles parfaits, qui sont les groupes du second ordre, etc.... Tout élément-suite est déterminé par les groupes partiels d'ordre 1, 2, ... n, ... qui le contiennent.

35. Signalons encore ce fait que, dans la division d'un ensemble de suites en ensembles partiels (en nombre fini ou infini) du même ordre, la désignation de ces ensembles partiels par des indices sert uniquement à rappeler que ces ensembles partiels sont pensés comme différents entre eux, et par conséquent l'attribution de ces indices peut être faite d'une manière complètement arbitraire: il n'y a pas lieu de considérer ces ensembles partiels comme rangés dans un ordre déterminé. Cela crée une différence caractéristique entre les ensembles de suites et les continus à 1 ou n dimensions, qui sont, comme on sait, des ensembles simplement ordonnés ou n fois ordonnés.

On peut dire, en résumé, que les ensembles de suites, tels que nous les avons construits, possédent les attributs du continu, en ce qui concerne la notion de limite, et seulement en ce qui concerne cette notion. La notion d'ordre relatif, qui est fondamentale dans les questions relatives aux continus (à 1, 2 ... n dimensions), et d'où dérivent en particulier les notions de cheminement, de connexion, n'existe pas dans les ensembles de suites.

On est ainsi conduit à considérer les ensembles de suites comme des *ensembles à 0 dimension;* nous appellerons *espace à 0 dimension* l'ensemble fondamental G_0 de toutes les suites; *toute suite sera un point de cet espace.*

36. Montrons maintenant que cette théorie est utile au point de vue de l'étude des fonctions définies sur un ensemble de points. Pour cela, rappelons quelques résultats du chapitre V de la première partie. Etant donné une fonction f définie sur un ensemble fermé P_0, et satisfaisant, sur tout ensemble parfait, à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, nous avons été conduits à considérer (§ 29) certains ensembles $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ dont chacun se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, et tels que, sur chacun des ensembles dont se compose P_n, f est identique à une certaine fonction de classe ≤ 1, sauf aux points qui appartiennent à P_{n+1}; de plus, il peut y avoir des points appartenant à tous les P_n, on désigne leur ensemble par P_ω. Il est assez naturel de dire, dans ces conditions, que la fonction f se réduit à des éléments connus, sauf aux points de P_ω, et l'on est alors amené à chercher des conditions auxquelles satisfont les valeurs de f sur P_ω; la théorie précédente va nous permettre de donner une première réponse à cette question.

Pour fixer les idées, prenons le cas étudié au § 35 (Première partie), où P_ω se compose des points irrationnels du segment $(0, 1)$ pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n. Il existe, comme on l'a vu au § 5 (Deuxième partie), une correspondance biunivoque entre P_ω et l'ensemble fondamental des suites d'entiers $(i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$, ensemble que je désigne par G_0; et, d'après les résultats de ce paragraphe, si $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots, A$, sont des éléments de G_0, ayant pour correspondants dans P_ω des points $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots, B$, la condition: $\lim A_n = A$ entraîne: $\lim B_n = B$ (la réciproque n'étant pas vraie).

Cela posé, f étant une fonction définie sur le segment $(0, 1)$, que nous désignons par P_0, considérons la fonction φ définie sur G_0 par la condition d'avoir, en tout élément de G_0, la valeur de f au point correspondant de P_ω. Si f est continue sur P_0, φ est continue sur G_0, car, en conservant les notations précédentes pour les éléments de G_0 et les points correspondants de P_ω, de: $\lim A_n = A$ résulte: $\lim B_n = B$, par suite, en vertu de la continuité de f: $\lim f(B_n) = f(B)$, ce qui s'écrit: $\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$; cette dernière condition exprime, comme A est arbitraire, que φ est continue sur G_0.

D'autre part, si $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ et f sont des fonctions définies sur P_0 et telles que $\lim f_n = f$, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ et φ, définies sur G_0 par la condition de correspondre à $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots, f$ comme f correspond à φ dans la question précédente, sont évidemment telles que $\lim \varphi_n = \varphi$.

On déduit immédiatement de l'ensemble de ces deux propositions que si f est une fonction de classe $\leq \alpha$, la fonction φ correspondante est de classe $\leq \alpha$ sur G_0. Cela est vrai pour $\alpha = 0$, d'après la première proposition; en admettant le fait pour tous les nombres inférieurs à un nombre $\alpha > 0$, et supposant f de classe $\leq \alpha$, f est la limite d'une suite $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$, f_n étant de classe $\alpha_n < \alpha$; les fonctions correspondantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ définies sur G_0 sont de classes au plus égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, et comme elles tendent vers φ, φ est de classe $\leq \alpha$.

En particulier, on voit que, f appartenant à l'ensemble E, φ appartient sur G_0, à l'ensemble E, et par conséquent satisfait, sur tout ensemble parfait de suites contenu dans G_0, à la condition fondamentale $m[\omega'(\varphi)] = 0$. Nous avons donc ainsi des conditions auxquelles satisfont les valeurs de f aux points de P_ω.

37. Nous allons maintenant montrer qu'on peut aller plus loin, et ramener complètement l'étude des fonctions des différentes classes α définies sur des ensembles de points à n dimensions ($n \geq 1$) à l'étude analogue sur des ensembles de suites, ou comme nous dirons, sur des ensembles à 0 dimension, cela dans

l'hypothèse $\alpha \geq 2$. Nous étudierons d'abord, dans ce but, quelques questions préliminaires.

Dans ce qui suit, nous considérons deux ensembles P et Q, dont chacun peut être, soit un ensemble de points, soit un ensemble de suites; grâce à la convention de langage précédemment faite, nous pouvons nous contenter de dire que chacun d'eux est un ensemble de points dans un espace à n dimensions, n étant un entier positif *ou nul*. Les nombres n et n' relatifs à P et Q peuvent être ou non différents.

38. Supposons qu'il existe entre les points de P et ceux de Q une correspondance biunivoque et réciproque, et telle que, $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ et A étant des points de P, $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ et B étant les points de Q qui leur correspondent respectivement, l'une quelconque des deux conditions: $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$, entraîne l'autre. Nous dirons alors que cette correspondance entre P et Q est bicontinue, et constitue une *application* de P sur Q.

Déduisons de cette définition deux conséquences.

P et Q étant applicables l'un sur l'autre, si P_1 est une partie de P, et si Q_1 est l'ensemble des points de Q correspondants à ceux de P_1, la correspondance qui applique P sur Q applique P_1 sur Q_1. En effet, avec les notations précédentes, si les A_n et A appartiennent à P_1, les B_n et B appartiennent à Q_1, et réciproquement; les conditions: $\lim A_n = A$, $\lim B_n = B$ étant équivalentes, il en résulte que la correspondance entre P_1 et Q_1 est une application.

Si P et Q sont applicables, et si P est dense en lui-même, Q est aussi dense en lui-même. En effet, soit B un point quelconque de Q; B a dans P un correspondant A; comme P est dense en lui-même, A est limite d'une suite de points de P distincts de A: $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$; ces points ont dans Q des correspondants $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ distincts de B, et l'on a $\lim B_n = B$; cela exprime, comme B est quelconque dans Q, que Q est dense en lui-même.

39. Nous aurons un premier exemple d'application en interprétant les résultats du § 1; on reconnaît en effet que l'ensemble parfait linéaire non dense qui y est désigné par P est applicable sur l'ensemble des suites: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ pour lesquelles chaque nombre a_i est égal à 1 ou 2. Nous avons donc là une application entre deux ensembles situés, l'un dans G_1, l'autre dans G_0. Ces ensembles sont tous deux parfaits, et par suite fermés; l'exemple suivant fera voir que, de deux ensembles applicables, l'un peut être fermé sans que l'autre le soit.

Soit $n \geq 1$. Je vais démontrer que l'ensemble H_n des points de G_n dont les n coordonnées sont irrationnelles est applicable sur G_0.

Considérons d'abord le cas de $n = 1$. Rappelons que tout nombre irrationnel x est de la forme:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}.$$

a_0 est un entier positif, nul, ou négatif, les nombres $a_1, a_2, \ldots$ sont des entiers positifs; établissons tout d'abord une correspondance biunivoque et réciproque entre les valeurs que prend a_0, qui forment un ensemble dénombrable, et les entiers positifs; nous désignerons par a'_0 la variable qui, par ce procédé, correspond à a_0; un nombre irrationnel x détermine alors une suite: $(a'_0, a_1, a_2, \ldots)$, dont chaque terme est un entier positif; et réciproquement une telle suite définit un nombre irrationnel x. On a ainsi, entre H_1 et G_0, une correspondance biunivoque et réciproque; cette correspondance est bicontinue, car, pour qu'un nombre irrationnel variable avec l'indice p, soit $x_1, x_2, \ldots x_p, \ldots$ tende vers un nombre irrationnel fixe x_0, il faut et il suffit que les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots a_h$, correspondants à x_p, deviennent, pour p assez grand, égaux aux nombres analogues relatifs à x_0, cela quel que soit h donné à l'avance; or, cette condition est évidemment remplie ou non en même temps que la condition analogue obtenue en substituant à a_0 la variable a'_0; donc il faut et il suffit, pour que x_p tende vers x_0, que la suite $(a'_0, a_1, a_2, \ldots)$ correspondante à x_p, tende vers la suite analogue correspondante à x_0; or, aux notations près, il y a identité entre l'ensemble des suites $(a'_0, a_1, a_2, \ldots)$ et l'ensemble G_0; donc il y a application de H_1 sur G_0.

Soit maintenant $n > 1$. Désignons par $x, y, \ldots z$, les coordonnées courantes dans G_n. Aux n coordonnées d'un point A de H_n, qui sont irrationnelles, correspondent, d'après la loi précédente, des suites d'entiers positifs:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} (a'_0, a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots \quad) \\ (b'_0, b_1, b_2, \ldots b_i, \ldots \quad) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (c'_0, c_1, c_2, \ldots c_i, \ldots \quad) \end{array}$$

Considérons alors la suite:

$$(2) \qquad (a'_0, b'_0, \ldots c'_0, a_1, b_1, \ldots c_1, a_2, b_2, \ldots c_2, \ldots a_i, b_i, \ldots c_i, \ldots).$$

Cette suite est un point B de l'espace à 0 dimension G_0, et il est évident que, quand A varie de toutes les manières possibles dans H_n, B peut coïncider avec tout point de G_0. La correspondance entre A et B est donc une correspondance biunivoque et réciproque entre H_n et G_0. Je dis qu'elle est bicontinue; soient $B_1, B_2, \ldots B_p, \ldots$ des points de G_0, ayant pour correspondants dans H_n les points $A_1, A_2, \ldots A_p, \ldots$ La condition nécessaire et suffisante pour que: $\lim B_p = B$

est que, quel que soit h, on puisse, en prenant p assez grand, rendre les développements (2) qui correspondent respectivement à B_p et B identiques en ce qui concerne les h premiers termes; si cela a lieu, la même condition est remplie par l'un quelconque des n développements (1), de sorte que chaque coordonnée $x, y, \dots z$, de A_p tend vers la coordonnée correspondante de A, donc A_p tend vers A; la réciproque a lieu, de sorte que la correspondance entre H_n et G_0 constitue une application.

40. Soient P et Q deux ensembles applicables. Considérons une fonction f définie, soit sur P, soit en certains points de P formant un ensemble P_1; considérons la fonction φ définie en chaque point B de Q correspondant à un point A de P par la condition: $\varphi(B) = f(A)$: nous dirons que φ est la transformée de f dans l'application de P sur Q. Nous nous proposons de rechercher si, de certaines propriétés simples de l'une de ces fonctions, il est possible de déduire des résultats concernant l'autre.

En premier lieu, soit A un point de P au voisinage duquel f est définie (c'est-à-dire que A fait partie de P_1^0); je dis que φ est définie au voisinage du point B de Q correspondant à A, et que le maximum, le minimum de φ au point B sont respectivement égaux aux nombres analogues relatifs à f au point A. Soit en effet λ un nombre inférieur au maximum de f en A; d'après la définition même de ce maximum, il existe une suite de points de P_1: $A_1, A_2, \dots A_h, \dots$, tendant vers A, et tels que, quel que soit h, on a: $f(A_h) > \lambda$ (ces points étant distincts ou non de A); les points de Q: $B_1, B_2, \dots B_h, \dots$ qui correspondent à $A_1, A_2, \dots A_h, \dots$, tendent vers B, et on a $\varphi(B_h) > \lambda$; donc φ est définie au voisinage de B, et le maximum de φ en B est au moins égal à λ; en opérant d'une manière analogue, mais partant de B au lieu de A, on reconnaît que les maxima de f en A et de φ en B sont tels qu'un nombre inférieur à l'un ne peut surpasser l'autre: ils sont donc égaux. Il y a de même égalité pour les minima, et par suite pour les oscillations de f en A et de φ en B.

41. Comme application, prenons le cas particulier important où P et Q sont tous deux fermés, et où f est définie en tout point de P: φ est alors définie en tout point de Q. Si f est continue sur P, c'est qu'en chaque point de P l'oscillation est nulle, il en est donc de même de l'oscillation de φ en tout point de Q; donc φ est aussi continue. Si f, définie sur P, est de classe α, je dis que φ est aussi de classe α; cela a lieu, d'après ce qui précède, pour $\alpha = 0$; admettons le résultat pour tous les nombres inférieurs à α; f est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \dots f_h, \dots$ de classes toutes inférieures à α; ces fonctions ont pour transformées des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_h, \dots$ appartenant aux mêmes classes, d'après le résultat admis, et $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_h, \dots$ tend vers φ, qui est donc de

classe $\leq \alpha$; en reprenant le raisonnement en partant de φ au lieu de f, on constate que la classe de f ne peut pas surpasser celle de φ: donc f et φ sont de même classe.

42. P et Q étant toujours deux ensembles applicables, supposons que l'un d'eux soit dense en lui-même; il en est alors de même pour l'autre, et les dérivés respectifs de P et Q, P^0 et Q^0, sont parfaits. Soit f définie sur P, φ sa transformée sur Q; je dis que si f est ponctuellement discontinue sur P^0, φ est ponctuellement discontinue sur Q^0. Pour le faire voir, commençons par transformer la définition de la discontinuité ponctuelle.

Soit $\sigma > 0$; soit K l'ensemble des points de P^0 où l'oscillation de f est $\geq \sigma$; pour que f soit ponctuellement discontinue, il faut et il suffit que, quel que soit σ, l'ensemble fermé K soit non dense dans P^0, ou, ce qui revient au même, que $P^0 - K$ soit partout dense dans P^0. Si cela a lieu, soit R l'ensemble des points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$. R comprend tous les points de P, sauf ceux qui font partie de l'ensemble non dense K; comme P est partout dense sur P^0, R est aussi partout dense sur P^0, c'est-à-dire que tout point de P^0, et en particulier tout point de P, est limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$. Réciproquement, supposons que tout point de P soit limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation est $< \sigma$; c'est donc que tout point de P fait partie du dérivé d'ordre o de R, R^0; comme $P^0 - K$ contient R, le dérivé d'ordre o de $P^0 - K$ contient R^0, par suite P, d'après ce qui précède, et par suite enfin le dérivé d'ordre o de P, c'est-à-dire P^0: cela veut dire que $P^0 - K$ est partout dense dans P^0, c'est-à-dire que f est ponctuellement discontinue.

En résumé, il faut et il suffit, pour que f soit ponctuellement discontinue sur P^0, que, quel que soit $\sigma > 0$, tout point de P soit limite d'une suite de points de P en chacun desquels l'oscillation soit $< \sigma$. Or, cette condition, supposée remplie par f, entraîne la même condition relativement à la transformée φ de f sur l'ensemble Q applicable sur P. Donc, si l'une des fonctions f et φ est ponctuellement discontinue, il en est de même de l'autre.

43. Soient P et Q deux ensembles applicables et d'ailleurs quelconques; f étant définie partiellement ou non sur P et de classe ≤ 1, je dis que sa transformée φ sur Q est aussi de classe ≤ 1. Il suffit, pour le voir, de vérifier que tout ensemble parfait H contenu dans Q^0 contient une portion dans laquelle φ est ponctuellement discontinue; or, soit Γ l'ensemble des points de Q contenus dans H: deux cas seulement sont possibles:

1°. Γ^0 ne coïncide pas avec H; c'est donc que H contient une portion dans laquelle φ n'est pas définie, et par suite doit être considérée comme ponctuellement discontinue au sens général.

2°. Γ^0 coïncide avec H; alors Γ est dense en lui-même et correspond à un ensemble Π de P qui est dense en lui-même; d'après l'hypothèse, f étant de classe $\leqq 1$, est ponctuellement discontinue sur Π^0, donc φ est aussi, d'après le § précédent, ponctuellement discontinue sur $H = \Gamma^0$.

Par le procédé de récurrence généralisé, on démontre comme précédemment que si f est de classe $\alpha\,(\alpha \geqq 2)$, φ est aussi de classe α, car la classe de l'une de ces fonctions ne peut surpasser celle de l'autre (sauf dans le cas où la classe de l'une est 0).

En résumé, étant donnée une fonction f définie sur un ensemble P, si φ est sa transformée sur un ensemble Q applicable sur P, dans le cas où P et Q sont fermés, on peut affirmer que les classes de ces fonctions sont toujours égales; dans le cas général, les classes des fonctions (sur P^0 et Q^0 respectivement) sont encore égales, sauf qu'elles peuvent être 0 pour l'une, 1 pour l'autre. Un exemple montre que ce dernier cas est réalisable: soit H_1 l'ensemble des nombres irrationnels du segment $(0, 1)$, qui a pour dérivé ce segment P_1; H_1 est applicable sur G_0 par le procédé du § 39. Prenons sur G_0 une fonction f égale à n en tous les points de G_0 faisant partie du groupe (n); cette fonction est continue, tandis que la transformée φ a sur P_1, des points de discontinuité en chaque point de la forme $\dfrac{1}{n}$.

44. Démontrons maintenant sur les fonctions de classe 2 un théorème qui ne diffère que par une légère modification de forme d'un théorème donné dans la première partie (§ 28). Les notions nouvelles acquises dans le présent mémoire vont nous permettre de traiter simultanément le cas des ensembles de points et celui des ensembles de suites.

Dans l'espace à n dimensions $(n \geqq 0)$, considérons un systéme dénombrable d'ensembles fermés rangés dans un certain ordre, $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$, et satisfaisant à la condition qu'un point quelconque de G_n fait partie au plus d'un nombre fini de ces ensembles. Soient $f_1, f_2, \ldots f_h, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots$ et de classe $\leqq 2$. Considérons la fonction f définie comme il suit: si A appartient à certains des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, ces ensembles étant par hypothèse en nombre fini, l'un d'eux a un indice supérieur aux autres, soit h cet indice: on prend $f(A) = f_h(A)$. Je dis que f, qui se trouve ainsi définie sur l'ensemble $P = M(P_1, P_2, \ldots P_h, \ldots)$, est de classe $\leqq 2$.

Pour que f soit définie sur un ensemble fermé, convenons, par exemple, de la définir en tout point de G_n, en lui donnant la valeur 0 en chaque point de $G_n - P$.

Comme f_h est de classe $\leqq 2$ sur P_h, il existe sur P_h une suite de fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{h,1}, f_{h,2}, \ldots f_{h,p}, \ldots$ tendant vers f_h. Définissons une fonction φ_p ainsi:

$\varphi_p = f_{1,p}$ aux points de P_1 n'appartenant pas à $P_2, P_3, \ldots P_p$,

$\varphi_p = f_{2,p}$ aux points de P_2 n'appartenant pas à $P_3, \ldots P_p$,

. . . . .

$\varphi_p = f_{p,p}$ aux points de P_p,

$\varphi_p = 0$ aux points de $G_n - M(P_1, P_2, \ldots P_p)$.

La fonction φ_p, étant obtenue par le procédé de superposition appliqué à un nombre fini de fonctions de classe $\leqq 1$, est de classe < 1.

Je dis que φ_p tend vers f en chaque point. C'est évident pour un point de $G_n - P$. Si A appartient à P, soit h le plus grand entier tel que A fait partie de P_h: on a $f(A) = f_h(A)$. Supposons $p > h$; d'après la définition de φ_p, comme A fait partie de P_h sans faire partie de $P_{h+1}, P_{h+2}, \ldots P_p$, on a $\varphi_p(A) = f_{h,p}(A)$; donc, quand p croît indéfiniment, $f_{h,p}(A)$ tend vers $f_h(A)$, c'est-à-dire que $\varphi_p(A)$ tend vers $f(A)$. Donc f est de classe $\leqq 2$.

45. Considérons l'espace à n dimensions $G_n (n \geqq 1)$; soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les coordonnées courantes. Si on donne à h de ces coordonnées des valeurs fixes, et si on fait varier les $n - h$ autres de toutes les manières possibles, on obtient un espace plan à $n - h$ dimensions, parallèle à h des axes de coordonnées. Supposons que ces h coordonnées fixes aient des valeurs rationnelles, et convenons de dire que nous avons ainsi un *plan rationnel d'ordre $n - h$ contenu dans G_n*. Il y a des plans rationnels d'ordre n (l'espace G_n lui-même), $n - 1, n - 2, \ldots 2, 1$ (ceux-ci sont, à proprement parler, des droites), 0 (chacun de ceux-ci se réduit à un point). L'ensemble de tous ces plans rationnels est dénombrable, car: 1° h peut recevoir un nombre *fini* de valeurs: $0, 1, 2, \ldots n$; 2° h étant fixé, on peut choisir d'un nombre *fini* de manières les h coordonnées qui reçoivent des valeurs fixes; 3° étant données, parmi $x_1, x_2, \ldots x_n$, les h coordonnées qui doivent recevoir des valeurs fixes, chacune d'elles peut recevoir toutes les valeurs rationnelles, donc on obtient ainsi une infinité *dénombrable* de plans.

Supposons que les plans rationnels ainsi définis soient rangés, d'une manière d'abord arbitraire, en une suite:

$$(1) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_K, \ldots$$

Soit P un de ces plans, supposé distinct de G_n, et par suite d'ordre $n - h$, avec $h \geqq 1$. Parmi les plans rationnels (1) autres que P, il y en a qui contiennent P: on les obtient en ne laissant fixes, parmi les h coordonnées fixes de P, que quelques-unes d'entre elles, remplaçant chacune des autres par une coordonnée variable prenant toutes les valeurs réelles possibles; comme cette opération ne peut se faire que d'un nombre fini de manières, on voit qu'étant donné un plan de (1) d'ordre $n - h$, il y a, dans (1), un nombre fini de plans d'ordres $n, n - 1, \ldots$ $\ldots, n - h + 1$, contenant P.

Cela posé, je dis qu'on peut ranger les éléments de (1) en une suite (2) ordonnée de telle sorte que dans cette nouvelle suite, chaque plan P soit placé après tous les plans qui le contiennent. Pour cela, prenons pour premier élément de (2), le plan G_n; supposant obtenus les q premiers éléments de (2), prenons, comme $(q+1)^{me}$ élément, le premier élément de (1) qui soit non obtenu encore et qui soit tel que tous les plans le contenant soient déjà obtenus.

Je dis que, par application de ce procédé, tout plan de (1) est obtenu. Cela a lieu pour G_n; supposons démontré que cela a lieu pour tout plan d'ordre $n, n-1, \ldots n-\alpha+1$, et démontrons le pour les plans d'ordre $n-\alpha$. Soit un plan d'ordre $n-\alpha$, occupant le rang K dans (1), donc désigné par P_K; il y a un nombre fini d'éléments P de (1) contenant P_K, ils sont d'ordre supérieur à $n-\alpha$, donc, d'après l'hypothèse admise, ils se trouvent tous obtenus au bout d'un certain nombre fini N d'opérations; donc, après $N+K$ opérations au plus, le plan P_K sera obtenu. Ainsi tous les plans (1) sont obtenus; et, d'après le procédé employé, la suite (2) est telle que chaque plan P y figure après tous ceux qui le contiennent.

Imaginons que la suite (1) soit la suite modifiée comme nous venons de l'expliquer, et possédant par conséquent la propriété précédente.

Soit P_K un des ensembles de cette suite, à h coordonnées fixes et $n-h$ variables; supposons que chacune de ces $n-h$ dernières reçoive toutes les valeurs irrationnelles possibles; l'ensemble H_K ainsi obtenu est applicable sur G_0 par le procédé du § 39. Considérons la suite des ensembles H_K correspondant respectivement aux ensembles de (1):

$$(3) \qquad H_1, H_2, \ldots H_K, \ldots$$

Soit A un point quelconque de G_n; soit h le nombre de ses coordonnées rationnelles. Il y a un et un seul ensemble de (3) qui contient A: c'est celui qu'on obtient en laissant fixes les h coordonnées rationnelles de A et donnant aux autres coordonnées toutes les valeurs irrationnelles; soit H_K cet ensemble; A fait partie de l'ensemble P_K qui correspond à H_K, et parmi les ensembles (1), les seuls, outre P_K, qui contiennent A, sont ceux qui contiennent P_K; donc, parmi les ensembles (1) qui contiennent A, il y en a un qui est contenu dans tous les autres, c'est P_K. On peut écrire, comme les H n'ont deux à deux aucun point commun,

$$G_n = H_1 + H_2 + \cdots + H_K + \cdots$$

46. Cela posé, soit f une fonction définie (totalement ou partiellement) sur G_n. Si f est de classe $\leq \alpha$, elle est de classe $\leq \alpha$ sur toute partie de G_n, en particulier sur chaque ensemble P_K, et aussi sur chaque ensemble H_K (H_K a pour

dérivé P_K); si on applique H_K sur G_0 par le procédé du § 39, la fonction f sur H_K se transforme en une fonction définie sur G_0 qui est de classe $\leq \alpha$ (sous la condition $\alpha \geq 1$ (§ 43), et même aussi pour $\alpha = 0$).

Réciproquement, dans l'hypothèse $\alpha \geq 2$, je dis que si f est telle que, par application de chacun des ensembles H_K sur G_0, on obtient une fonction de classe $\leq \alpha$, f est de classe $\leq \alpha$ sur G_n. Il suffit de vérifier la proposition pour $\alpha = 2$, l'extension au cas de $\alpha > 2$ s'en déduisant par application du procédé de récurrence généralisé.

Nous supposons donc f telle que, en appliquant l'un quelconque des ensembles H_K sur G_0, la transformée de f soit de classe ≤ 2. Dans ces conditions, d'après le § 43, f est de classe ≤ 2 sur H_K, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f_K de classe ≤ 2 définie sur P_K (dérivé d'ordre 0 de H_K), et égale à f en tout point de H_K. Le procédé du § 44 est applicable aux fonctions de classe ≤ 2: $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_K, \ldots$ respectivement définies sur les ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots P_K, \ldots$, puisqu'un point A de G_n fait partie d'un nombre fini de ces ensembles; soit F la fonction à laquelle donne naissance ce procédé: F est de classe ≤ 2. Je dis que $F = f$; en effet, soit A un point de G_n; soit H_K l'ensemble de la suite (3) dont A fait partie; parmi les ensembles de (1) qui contiennent A, P_K est le dernier (§ 45); dans l'application du procédé de formation de F (§ 44), on obtient: $F(A) = f_K(A)$; et comme A fait partie de H_K, on a par la définition de f_K: $f_K(A) = f(A)$; ainsi $F(A) = f(A)$. Donc f est de classe ≤ 2.

En résumé, *il faut et il suffit, pour que f soit de classe $\leq \alpha$ ($\alpha \geq 2$) sur G_n, que, pour tous les H_K, la transformée de f sur G_0 par application de H_K sur G_0 soit de classe $\leq \alpha$.* La conclusion de cette étude est que, *pour $\alpha \geq 2$, l'étude des fonctions sur G_n peut se ramener à l'étude des fonctions définies sur G_0.*

CHAPITRE V.

Cas particuliers de fonctions.

47. Dans le chapitre III, nous avons étendu aux fonctions définies sur un ensemble à 0 dimension les résultats des chapitres III et IV de la première partie (étude des fonctions de classe ≤ 1, étude de la condition $m[\omega'(f)] = 0$). Nous en sommes donc, en ce qui concerne les fonctions définies sur un ensemble à 0 dimension, au même point où nous en étions en ce qui concerne les fonctions définies sur un ensemble à n dimensions, au commencement du chapitre V de la première partie. Nous sommes donc conduits tout naturellement à faire une

étude analogue à celle des premiers numéros de ce chapitre; c'est par là que nous allons commencer.

Tout d'abord, une fonction f définie sur un ensemble fermé P de G_0 est de classe $\leqq 1$ sur P, si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^Ω; a fortiori, si $\alpha > 1$, f est de classe $\leqq \alpha$ sur P dès qu'elle est de classe $\leqq \alpha$ sur P^Ω; nous pouvons donc, dans la suite, nous borner à considérer des fonctions définies sur un ensemble *parfait*.

Soit donc f définie sur l'ensemble parfait P et satisfaisant sur P à la condition $m[\omega'(f)] = 0$; il y a un ensemble de première catégorie K et une fonction φ de classe $\leqq 1$ sur P tels que $f = \varphi$ en tout point de $P - K$. Soit $K = M(K_1, K_2, \ldots K_i, \ldots)$, les K_i étant *non denses* dans P; remplaçons chaque ensemble K_i par son dérivé d'ordre 0, K_i^0, qui contient K_i, est aussi non dense dans P, et de plus est fermé; K_i^0 se compose de l'ensemble parfait K_i^Ω (s'il existe), plus un ensemble dénombrable. Si $K' = M(K_1^0, K_2^0, \ldots K_i^0, \ldots)$, on a $f = \varphi$ en tout point de $P - K'$, et K' se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits: $K_1^\Omega, K_2^\Omega, \ldots K_i^\Omega, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. On sera conduit à étudier la fonction f sur chacun des ensembles parfaits K_i^Ω, qu'on traitera exactement comme on a traité P; on introduira ainsi des ensembles parfaits non denses dans chacun des K_i^Ω, puis des ensembles parfaits non denses dans chacun des ensembles obtenus, etc. . . .

48. Théorème. *Soit P_0 un ensemble fermé, et $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles fermés tous contenus dans P_0; soient $f_0, f_1, f_2, \ldots f_i, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_0, P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$, et toutes de classe $\leqq 2$. La fonction f, qui est égale à f_1 sur P_1, à f_i $(i = 2, 3, \ldots)$ aux points de P_i qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}$, enfin à f_0 aux points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots$, est de classe $\leqq 2$ sur P_0.*

En effet, h étant l'un des entiers $0, 1, 2, \ldots i, \ldots$, il y a, sur P_h, une suite de fonctions de classe $\leqq 1$ tendant vers f_h, soit:

$$f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots f_{\nu,h}, \ldots$$

En tout point A de P_h, on a:

$$\lim_{\nu\, \infty} f_{\nu,h}(A) = f_h(A). \tag{1}$$

Cela posé, définissons des fonctions φ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ comme il suit:

$\varphi_\nu = f_{\nu,1}$ sur P_1;

$\varphi_\nu = f_{\nu,h}$ $(h = 2, 3, \ldots \nu)$ aux points de P_h qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{h-1}$;

$\varphi_\nu = f_{\nu,0}$ aux points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles P_1, $P_2, \ldots P_\nu$.

La fonction φ_ν, ainsi définie sur P_0, est de classe ≤ 1, comme obtenue par superposition des fonctions de classe < 1: $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, \ldots f_{\nu,\nu}, f_{\nu,0}$.

Je dis qu'en tout point A de P_0, on a: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = f(A)$. En effet, si A fait partie d'un des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, soit i le plus petit indice tel que A appartient à P_i; alors A n'appartient à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots P_{i-1}$ (si $i > 1$). D'après la définition de φ_ν, dès que $\nu \geq i$, on a $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,i}(A)$, et d'après la définition de f, on a $f(A) = f_i(A)$. Donc, en utilisant la condition (1), on a:

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim_{\nu=\infty} f_{\nu,i}(A) = f_i(A) = f(A).$$

Si A ne fait partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, on a, quel que soit ν: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,0}(A)$, et d'autre part: $f(A) = f_0(A)$; donc:

$$\lim_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim_{\nu=\infty} f_{\nu,0}(A) = f_0(A) = f(A).$$

Ainsi f est la limite de φ_ν qui est de classe ≤ 1, donc f est de classe ≤ 2.

49. Comme cas particulier de ce théorème, on voit que si f_0 est une fonction de classe ≤ 2 définie sur l'ensemble fermé P_0, la fonction f obtenue en remplaçant par des valeurs arbitraires les valeurs de f_0 aux points d'un ensemble *dénombrable* Q est de classe ≤ 2. Il suffit en effet, en désignant les points de Q par $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots$, d'appliquer la proposition précédente en prenant $P_i = A_i$, et $f_i = f$. On en conclut que, *si R est un ensemble dénombrable de points, la classe α d'une fonction f est indépendante de ses valeurs aux points de R, dès que $\alpha \geq 2$.*

Reprenons le procédé du § 47. Nous partons d'une fonction f définie sur un ensemble fermé P_0 et satisfaisant sur tout ensemble parfait contenu dans P_0 à la condition $m[\omega'(f)] = 0$; il existe, d'une part une fonction φ_0 de classe ≤ 1 sur P_0, d'autre part un ensemble de première catégorie dans P_0, soit P_1, tel qu'on a $f = \varphi_0$ en tout point de $P_0 - P_1$; de plus on peut supposer que P_1 se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans P_0^Ω, soit $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Si f se trouve être de classe ≤ 1 sur chacun des ensembles p_i, l'application du théorème du § 48 (en remplaçant f_0 par φ_0 et tous les f_i $(i > 0)$ par f), montre que f est de classe ≤ 2 sur P_0.

Si cela n'est pas, nous traiterons chaque ensemble parfait p_i comme nous avons traité P_0; nous définissons donc une fonction φ_i de classe ≤ 1 sur p_i, et un ensemble de première catégorie dans p_i, soit p'_i, tel que $f = \varphi_i$ en tout point

de $p_i - p'_i$; de plus, p'_i se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans p_i, soit $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots p_{i,j}, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. On peut être amené à continuer l'application du procédé; d'une manière générale, si l'on a introduit l'ensemble parfait $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, et si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur cet ensemble, il y a une fonction de classe $\leqq 1$ sur $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, soit $\varphi_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, et un ensemble de première catégorie dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, soit $p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$, tel qu'on a $f = \varphi_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$ en tout point de $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha} - p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$. L'ensemble $p'_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$ se compose, outre un certain ensemble dénombrable, d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_\alpha}$; nous les désignons par $p_{i_1, i_2 \ldots i_\alpha, i_{\alpha+1}}$, l'indice $i_{\alpha+1}$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots$ Désignons par P_α l'ensemble formé par la réunion des ensembles p à α indices.

Je dis que si, par l'application du procédé indiqué, on obtient un ensemble P_h tel que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i_1, i_2 \ldots i_h}$ dont se compose P_h, f est de classe $\leqq 2$ sur P_0; il suffit, pour le voir, d'appliquer successivement le théorème du § 48, d'abord à chacun des ensembles p à $h - 1$ indices, ce qui montre que f est de classe $\leqq 2$ sur chacun de ces ensembles, puis ensuite à chacun des ensembles à $h - 2$ indices, et ainsi de suite en remontant jusqu'à chacun des ensembles $p_1, p_2, \ldots$, et finalement à P_0.

50. Il peut arriver aussi qu'on soit conduit à former des ensembles P_h en nombre infini.

Indiquons des exemples. Soit $P_0 = G_0$. Donnons-nous d'une part un entier positif n, d'autre part un système de h entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, et étudions *l'ensemble Q des suites*[1] *commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, chacun des termes suivants de la suite étant $> n$.*

Soit A le point:

$$(a_1, a_2, \ldots a_h, a_{h+1}, \ldots).$$

Si A ne fait pas partie de Q, c'est que, ou bien $(a_1, a_2, \ldots a_h)$ ne coïncide pas avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, ou bien l'un des entiers $a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots$, soit a_K, est $\leqq n$. En prenant, dans le premier cas, le groupe $(a_1, a_2, \ldots a_h)$, dans le second cas, le groupe $(a_1, a_2, \ldots a_h, \ldots a_K)$, on a un groupe qui contient A et ne contient aucun point de Q. Ainsi tout point qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q; donc Q est *fermé.*

Si B fait partie de Q, il est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots)$$

[1] Je rappelle que j'emploie indifféremment les mots *point* ou *suite d'entiers.*

les β étant $> n$. On obtient un autre point de Q en remplaçant un quelconque des β, soit β_r, par un nombre supérieur; en donnant à r des valeurs croissant indéfiniment, on obtient une suite de points variables de Q tendant vers B; donc tout point de Q est limite pour Q; donc Q, qui est fermé, est *parfait.*

Le point C:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots \beta_{h+j}, 1, 1, \ldots)$$

obtenu en remplaçant dans B les termes dont le rang supasse $h + j$ par 1, ne fait pas partie de Q; si on fait croître j indéfiniment, ce point tend vers B. Donc Q est *non dense* dans P_0.

Ainsi, *l'ensemble des points commençant par* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$, *les autres termes étant supérieurs à* n, *est un ensemble parfait non dense.* Nous désignerons maintenant cet ensemble par $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$.

51. Si nous donnons à n une valeur fixe, et si nous faisons varier de toutes les manières possibles les entiers $h, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, nous obtenons une infinité dénombrable d'ensembles $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$. *L'ensemble P_n formé par la réunion de tous les $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ est l'ensemble des suites pour lesquelles tous les termes surpassent n, à partir d'un certain rang.*

Prenons, parmi les ensembles $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$, 1° ceux pour lesquels $h = n$, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, prenant toutes les valeurs possibles;

2° ceux pour lesquels $h \geq n$, avec $\alpha_h \leq n$. Appellons ensembles normaux $p^{(n)}$ ces ensembles. Je dis qu'un point déterminé A de P_n appartient à un et un seul ensemble normal $p^{(n)}$. En effet, soit $(a_1, a_2, \ldots)$ ce point. Le seul ensemble $p^{(n)}$ contenant A qui remplit l'une des conditions 1° ou 2° est l'ensemble $p^{(n)}[a_1, a_2, \ldots a_h]$, h étant le plus petit nombre supérieur ou égal à n, tel que tous les a de rang supérieur à h soient supérieurs à n.

Ainsi deux ensembles normaux $p^{(n)}$ n'ont aucun point commun, et P_n est la réunion de tous les ensembles normaux $p^{(n)}$.

Il est évident que P_{n+1} est contenu dans P_n.

Soit $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k]$ un ensemble normal $p^{(n+1)}$; on a, soit $k = n + 1$, soit $k > n + 1$, avec $\alpha_k \leq n + 1$.

Si les nombres $\alpha_{n+1}, \ldots \alpha_k$ sont tous supérieurs à n, posons $h = n$; sinon, certains d'entre eux étant inférieurs ou égaux à n, prenons, parmi ces derniers, celui qui a le rang le plus élevé, et appelons h ce rang. On a ainsi, soit $h = n$, soit $h > n$, avec $\alpha_h \leq n$, de sorte que l'ensemble $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ est normal; de plus, si $k > h$, les nombres $\alpha_{h+1}, \alpha_{h+2}, \ldots \alpha_k$ sont supérieurs à n. Ainsi tout point de $p^{(n+1)}[\alpha_1, \ldots \alpha_h, \ldots \alpha_k]$ possède la propriété caractéristique des points de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$. Donc *tout ensemble normal $p^{(n+1)}$ est contenu dans un cer-*

tain ensemble normal $p^{(n)}$, lequel est unique, puisque un ensemble normal $p^{(n)}$ autre que $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ n'a aucun point commun avec cet ensemble.

Je dis que $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k]$ est *non dense* dans $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$. Il suffit de faire voir qu'au voisinage de tout point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ existe un point qui fait partie de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ sans faire partie de $p^{(n+1)}[\alpha_1, \ldots \alpha_k]$. Or, soit A un point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots).$$

Considérons, j étant arbitraire, le point B:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots \beta_{h+j}, n+1, n+1, \ldots),$$

dans lequel tous les termes de rang supérieur à $h+j$ sont égaux à $n+1$. Ce point appartient bien à $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$, puisque les termes de rang $> h$ sont $> n$, mais il n'appartient pas à P_{n+1}, puisqu'il y a une infinité de termes égaux à $n+1$; donc il n'appartient pas à $p^{(n+1)}[\alpha_1, \ldots \alpha_k]$.

De plus, en prenant j assez grand, le point B peut être pris aussi voisin qu'on veut de A, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, modifiant les notations précédentes, nous rangerons les ensembles normaux $p^{(1)}$ dont se compose P_1 dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par la notation $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ Chacun des ensembles normaux $p^{(2)}$ appartient à un et un seul des ensembles normaux $p^{(1)}$; dans l'ensemble p_i, il y a une infinité dénombrable d'ensembles normaux $p^{(2)}$, nous les rangerons dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots p_{i,j}, \ldots$ Nous définissons ainsi d'une manière générale des ensembles parfaits $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, les entiers $n, i_1, i_2, \ldots i_n$, prenant toutes les valeurs entières positives. L'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}}$ est contenu dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ et est non dense par rapport à lui. La réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, n étant fixe, constitue l'ensemble P_n des points pour lesquels tous les termes, à partir d'un certain rang, surpassent n.

52. Il y a des points qui font partie de P_n, quel que soit n; ce sont les points pour lesquels le terme de rang n croît indéfiniment avec n; en effet, pour ces points, le nombre de termes inférieurs à n est fini, quel que soit n; je désigne l'ensemble de ces points par P_ω; on a:

$$P_0 > P_1 > \ldots > P_n > \ldots > P_\omega$$

et

$$P_\omega = D(P_0, P_1, \ldots P_n, \ldots).$$

Soit A un point déterminé de P_ω:

$$(a_1, a_2, \ldots).$$

Ce point fait partie de P_1, il appartient à un ensemble normal $p^{(1)}$ bien déterminé, soit p_{i_1}; appartenant à P_2, il appartient à un ensemble normal $p^{(2)}$ bien déterminé, qui doit être contenu dans p_{i_1}, soit donc p_{i_1, i_2}; d'une manière générale, le point A est contenu dans un ensemble normal $p^{(n)}$ bien déterminé, de la forme $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. Il y a donc une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$ telle que A est contenu dans tous les ensembles:

$$p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \ldots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \ldots$$

Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$ et considérons les ensembles:

$$P_0 > p_{i_1} > p_{i_1, i_2} > \ldots > p_{i_1, i_2, \ldots i_n} > \ldots \tag{1}$$

Si nous revenons aux notations primitives relatives aux ensembles p, ces ensembles seront désignés de la manière suivante:

$$p_{i_1} = p^{(1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h_1}] \text{ avec } h_1 \geq 1,$$
$$p_{i_1, i_2} = p^{(2)}[\alpha_1, \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}] \text{ avec } h_2 \geq 2 \text{ et } h_2 \geq h_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_{i_1, i_2, \ldots i_n} = p^{(n)}[\alpha_1 \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}, \ldots \alpha_{h_n}] \text{ avec } h_n \geq n \text{ et } h_n \geq h_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Du fait que $h_n \geq n$ résulte que h_n croît indéfiniment, de sorte que les entiers α définis par ce qui précède sont en nombre infini; il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles p de (1); c'est le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h_1}, \ldots \alpha_{h_2}, \ldots \alpha_{h_n}, \ldots)$$

et ce point appartient à tous les P_n, par suite à P_ω.

Ainsi, à toute suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots$, correspond un point déterminé de P_ω, à savoir le point unique contenu dans tous les ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.

On peut donc dire qu'une correspondance biunivoque et réciproque se trouve établie entre P_0 et P_ω au moyen de la loi suivante:

(a) *Le point A de P_0: $(i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots)$ et le point B de P_ω: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$ se correspondent si B est contenu, quel que soit n, dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.*

Cette correspondance possède la propriété suivante: Si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de P_0, et si $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$ sont les points correspondants de P_ω, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ entraîne: $\lim B_\nu = B_0$. En effet, soit:

$$\left.\begin{aligned} A_\nu &= [(i_1)_\nu,\ (i_2)_\nu, \ldots (i_n)_\nu, \ldots] \\ B_\nu &= [(\alpha_1)_\nu, (\alpha_2)_\nu, \ldots (\alpha_h)_\nu, \ldots] \end{aligned}\right\} \nu = 1,\ 2, \ldots 0.$$

Si A_ν tend vers A_0, c'est que, quel que soit n, quand ν dépasse un certain entier p, A_ν est contenu dans le groupe d'ordre n qui contient A_0, c'est-à-dire que:

$$(1) \qquad (i_1)_\nu = (i_1)_0,\ (i_2)_\nu = (i_2)_0, \ldots (i_n)_\nu = (i_n)_0.$$

D'autre part, d'après la définition des divers ensembles $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, deux points contenus dans le même ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ ont en commun au moins les n premiers termes, de sorte que les conditions (1) entraînent pour les points B_ν et B_0 les conditions:

$$(\alpha_1)_\nu = (\alpha_1)_0,\ (\alpha_2)_\nu = (\alpha_2)_0, \ldots (\alpha_n)_\nu = (\alpha_n)_0.$$

Comme n est arbitraire, cela exprime que B_ν tend vers B_0.

Nous dirons que la correspondance établie entre P_0 et P_ω par la loi (a) est *biunivoque, réciproque, et continue dans le sens de P_0 sur P_ω.*

La partie de P_ω contenue dans l'ensemble $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, soit $D(p_{i_1, i_2, \ldots i_n}, P_\omega)$ est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. Car, soit:

$$p_{i_1, i_2, \ldots i_n} = p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h];$$

au voisinage de tout point A de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$, soit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots),$$

existe un point faisant partie du même ensemble et de P_ω; il suffit de prendre le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots \beta_{h+j}, n+1, n+2, \ldots),$$

où les termes qui suivent celui de rang $h+j$ sont les nombres entiers positifs à partir de $n+1$. Ce point, qui fait partie de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h]$ et de P_ω, peut être pris aussi voisin qu'on veut de A, en prenant j assez grand.

A fortiori, si $r > n$, l'ensemble $D(p_{i_1, i_2, \ldots i_n}, P_r)$ est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$. En particulier, l'ensemble formé par la réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}}$ ($i_1, i_2, \ldots i_n$ fixes, i_{n+1} variable) est dense dans $p_{i_1, i_2, \ldots i_n}$.

Des raisonnements tout à fait analogues à ceux de la première partie (§ 36 à la fin) montreraient que la fonction f qui est égale, sur $P_i - P_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) à u_i, et sur P_ω à u_ω ($u_0, u_1, \ldots u_i, \ldots u_\omega$ étant des nombres arbitraires] est de classe 3 si l'on n'a pas lim $u_i = u_\omega$, et de classe ≤ 2 si lim $u_i = u_\omega$.

CHAPITRE VI.

Les ensembles à 0 dimension.

53. Nous allons généraliser les procédés employés dans l'exemple précédent, et pour cela poser de nouvelles définitions.

Partons d'un ensemble fermé P. Considérons des ensembles fermés, en nombre infini dénombrable ou fini, tous contenus dans P; désignons-les par la notation p_i, i prenant soit toutes les valeurs entières positives, soit certaines de ces valeurs. Nous dirons que nous avons là un *système d'ensembles* contenu dans P, et nous le désignerons par $K(p_i)$.

Si les ensembles p_i n'ont deux à deux aucun point commun, nous dirons que le système est *normal*.

n étant donné, si chaque ensemble p_i est contenu dans un groupe d'ordre n, nous dirons que le *système est d'ordre n*.

Ainsi, *un système normal d'ordre n est constitué par une infinité dénombrable* (ou un nombre fini) *d'ensembles fermés n'ayant deux à deux aucun point commun, et dont chacun est contenu dans un groupe d'ordre n*.

54. Soit un système quelconque $K(p_i)$ contenu dans l'ensemble fermé P, et constitué par les ensembles $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ Proposons-nous de trouver des ensembles fermés $q_1, q_2, \ldots$ n'ayant deux à deux aucun point commun et tels que tout point appartenant à l'un des ensembles $p_1, p_2, \ldots$, appartienne à un et un seul des ensembles $q_1, q_2, \ldots$, autrement dit de *remplacer le système quelconque $K(p_i)$ par un système normal contenant les mêmes points*.

Définissons d'abord la notion de groupes *contigus*. Soit T un ensemble fermé contenu dans P. Considérons les groupes relatifs à P et extérieurs à T; prenons, parmi eux, d'abord les groupes d'ordre 1, puis les groupes d'ordre 2 non contenus dans les précédents, puis les groupes d'ordre 3 non contenus dans les précédents, etc.... Nous dirons que chacun des groupes obtenus est contigu à T; ainsi, un groupe d'ordre n est contigu à T s'il est relatif à P, extérieur à T, et si le groupe d'ordre $n-1$ qui le contient (dans le cas de $n > 1$) contient des points de T; deux groupes contigus à T distincts n'ont aucun point commun, d'après le procédé qui a servi à définir ces groupes; enfin, tout point de $P - T$ appartient à un groupe contigu à T, car si A est un tel point, les groupes contenant A ne peuvent contenir tous des points de T, puisque T est fermé; si n est le plus petit entier tel que le groupe d'ordre n contenant A est extérieur à T, ce groupe est contigu à T.

Revenons aux ensembles $p_1, p_2, \dots p_i, \dots$ Posons, à partir de $i = 2$:

$$p'_i = M(p_1, p_2, \dots p_{i-1});$$

p'_i est fermé; soit $g_{i,1}, g_{i,2}, \dots g_{i,k}, \dots$ les groupes contigus à p'_i; désignons par $t_{i,k}$ la portion de p_i contenue dans le groupe $g_{i,k}$; nous avons ainsi des ensembles fermés $t_{i,k}$ dépendant de deux indices; en y ajoutant l'ensemble p_1, nous avons une infinité dénombrable d'ensembles que nous prendrons pour ensembles $q_1, q_2, \dots$

Deux de ces ensembles n'ont aucun point commun. D'abord p_1 n'a aucun point commun avec l'un quelconque des ensembles t, puisque chacun de ceux-ci est contenu dans un groupe contigu à un ensemble p'_i qui contient p_1. Soit maintenant deux ensembles t; s'ils ont même premier indice, ils appartiennent à deux groupes différents contigus à un même ensemble p' et par suite n'ont aucun point commun. S'ils n'ont pas même premier indice, soit $t_{h,a}$ et $t_{h',a'}$, avec $h' > h$; $t_{h,a}$ fait partie de p_h, donc de $p'_{h'} = M(p_1, p_2, \dots p_h, \dots p_{h'-1})$; or, $t_{h',a'}$ est contenu dans un groupe contigu à $p'_{h'}$, donc n'a aucun point commun avec $t_{h,a}$.

Tout point A appartenant à un des ensembles p_i appartient à un ensemble q; car, soit i le plus petit entier tel que A fait partie de p_i; si $i = 1$, A fait partie de p_1 qui est un ensemble q; si $i > 1$, A ne fait pas partie de $p_1, p_2, \dots p_{i-1}$, donc pas de p'_i; donc A appartient à un certain groupe contigu à p'_i, soit $g_{i,k}$; faisant partie de p_i, il appartient à $t_{i,k}$.

En résumé, *le système formé par les ensembles q est normal et contient tous les points du système donné $K(p_i)$*.

En outre, n étant donné, on peut remplacer chaque ensemble q par la somme de ses portions contenues dans les différents groupes d'ordre n; on obtient encore ainsi une infinité dénombrable d'ensembles fermés n'ayant deux à deux aucun point commun, chacun étant contenu dans un groupe d'ordre n, et tels que tout point de $K(p_i)$ appartient à l'un d'eux: le système de ces ensembles est un système normal d'ordre n.

55. Définitions.

Soit $K(p_i)$ un système normal. Etant donnés les points $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots A_0$, dont chacun fait partie d'un des ensembles p_i, nous dirons que, *dans le système $K(p_i)$, la suite $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots$ a pour limite A_0, ou encore qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans le système $K(p_i)$, si l'on a $\lim A_\nu = A_0$ (au sens ordinaire), et si, en outre, p_i étant l'ensemble du système qui contient A_0* (cet ensemble est unique, puisque le système est normal), *les points de la suite $A_1, A_2, \dots A_\nu, \dots$ sont, à partir d'un certain rang, tous contenus dans p_i.*

56. *Etant donnés deux systèmes normaux $K(p_i)$ et $K(q_j)$, nous dirons que*

$K(q_j)$ est contenu dans $K(p_i)$ si chaque ensemble de $K(q_j)$ est contenu dans un des ensembles p_i (lequel est nécessairement unique). Nous écrirons dans ce cas:

$$K(p_i) \geq K(q_j).$$

Remarquons que si cela a lieu, si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de $K(q_j)$, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$, car les points $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ finissent par être contenus dans l'ensemble q_j qui contient A_0, d'après la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$, et par suite dans l'ensemble p_i qui contient A_0, ce qui entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$.

57. On sait que, étant donnés des ensembles fermés $p, q, \ldots r$, l'ensemble des points communs à tous ces ensembles, $D(p, q, \ldots r)$, est fermé; on dit que $D(p, q, \ldots r)$ est le plus grand commun diviseur de $p, q, \ldots r$.

Soit maintenant des systèmes normaux en nombre fini:

$$K(p_i),\ K(q_j), \ldots K(r_l). \tag{1}$$

On appelle système plus grand commun diviseur des systèmes (1) *le système constitué par les ensembles $D(p_i, q_j, \ldots r_l)$ obtenus en associant de toutes les manières possibles un des ensembles p_i, un des ensembles $q_j, \ldots$, un des ensembles r_l*; le nombre de ces manières est évidemment infini dénombrable ou fini.

Le système obtenu, soit $K(t_h)$, est évidemment contenu dans chacun des systèmes (1). Il est normal, car si on considère deux combinaisons différentes des indices $(i, j, \ldots l)$, soit $(i, j, \ldots l,)$ et $(i', j', \ldots l')$, on a au moins l'une des conditions $i \neq i'$, $j \neq j', \ldots l \neq l'$; si par exemple $i \neq i'$, les ensembles p_i et $p_{i'}$ n'ayant aucun point commun, il en est de même des ensembles $D(p_i, q_j, \ldots r_l)$ et $D(p_{i'}, q_{j'}, \ldots r_{l'})$.

Si chacun des systèmes (1) est d'ordre n, le système $K(t_h)$ est aussi d'ordre n.

Soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points appartenant à $K(t_h)$. Je dis que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$ est qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes* (1)*: $K(p_i)$, $K(q_j), \ldots K(r_l)$.*

Supposons en premier lieu qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$. Il en résulte que: 1° on a: $\lim A_\nu = A_0$ (sens ordinaire); 2° l'ensemble déterminé t_h qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse une certaine valeur s. Considérons alors le système $K(p_i)$; il y a dans ce système un ensemble bien déterminé p_i qui contient t_h; donc cet ensemble p_i contient A_0, et aussi A_ν pour $\nu > s$; et comme $\lim A_\nu = A_0$, il en résulte; $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_i)$. De même on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(q_j)$, etc. . . .

Réciproquement, supposons qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes $K(p_i)$, $K(q_j)$, ... $K(r_l)$. L'ensemble p_i de $K(p_i)$ qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse un certain entier s_1; l'ensemble q_j qui contient A_0 contient A_ν dès que ν surpasse un certain entier s_2, etc.... Soit t_h l'ensemble commun à $p_i, q_j, \ldots$; dès que ν surpasse le plus grand des entiers $s_1, s_2, \ldots,$ A_ν est contenu dans t_h, qui contient d'ailleurs A_0. Comme on a $\lim A_\nu = A_0$, on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(t_h)$. La proposition est donc démontrée.

58. Soit P un ensemble fermé. Prenons arbitrairement un système normal d'ordre 1 contenu dans P, soit $K(p_{\beta_1})$; p_{β_1} étant un ensemble de ce système, prenons un système normal d'ordre 2 contenu dans p_{β_1}, et dont nous désignerons les ensembles par p_{β_1, β_2}, β_2 recevant certaines valeurs entières positives; chaque ensemble p_{β_1} peut contenir une infinité dénombrable d'ensembles p à deux indices, ou un nombre fini, ou n'en contenir aucun. En poursuivant l'application du procédé, on définit des ensembles fermés désignés par la notation $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, dans les conditions suivantes:

1° L'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

2° Tout ensemble à h indices est contenu dans un groupe d'ordre h.

3° Deux ensembles distincts ayant le même nombre d'indices n'ont aucun point commun.

Il résulte de 2° et 3° que, h étant fixé, le système des ensembles à h indices est un système normal d'ordre h; soit $K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h})$ ce système, ou, pour abréger, K_h; on a, d'après 1°:

$$K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots \geqq K_h \geqq \ldots \tag{1}$$

Nous appellerons *suite normale de systèmes une suite de systèmes normaux d'ordres respectifs* 1, 2, ... h, ..., *dont chacun est contenu dans le précédent.* Ainsi (1) est une suite normale de systèmes.

Les indices $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ des ensembles p qui constituent les différents systèmes (1) sont des groupes dont l'ensemble Γ est complet, puisque, si $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ fait partie de Γ, les groupes (β_1), (β_1, β_2), ... $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{h-1})$ en font aussi partie. Soit R l'ensemble fermé de suites (ou points) déterminé par l'ensemble de groupes Γ. R est, comme on sait, l'ensemble des points $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ tels que tous les groupes (β_1), (β_1, β_2), ... $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h)$, ... font partie de Γ.

Soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ un tel point. Les ensembles $p_{\beta_1}, p_{\beta_1, \beta_2}, \ldots,$ $p_{\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_h}, \ldots$ existent effectivement, et l'on a:

$$p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1, \beta_2} \geqq \ldots \geqq p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \ldots \tag{2}$$

De plus, $p_{\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_h}$ est contenu dans un groupe d'ordre h.

Soit (α_1) le groupe qui contient p_{β_1}; l'ensemble p_{β_1, β_2} est contenu, d'une part dans p_{β_1} et par suite dans (α_1), d'autre part dans un certain groupe d'ordre 2; donc ce dernier groupe est contenu dans (α_1), et est de la forme (α_1, α_2); en continuant le raisonnement, on reconnaît l'existence d'une suite infinie d'entiers: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots$ telle que, quel que soit h, $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$.

Soit A le point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$. h étant fixé, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$ contient l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ et par suite tous ceux qui suivent cet ensemble dans (2); donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$ contient des points de chacun des ensembles (2). Cela étant, soit p l'un quelconque des ensembles (2); puisque, quel que soit h, le groupe d'ordre h qui contient A contient des points de l'ensemble fermé p, A appartient à p. Ainsi A appartient à tous les ensembles (2).

D'ailleurs un point qui fait partie de tous les ensembles (2) appartient aux groupes (α_1), $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h), \ldots$, donc se confond avec A. Il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles (2).

A tout point B de R nous pouvons ainsi faire correspondre le point A de P qui est l'unique point contenu dans les ensembles (2).

A deux points distincts B et B' de R correspondent ainsi deux points A et A' distincts; car, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$, $B' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_h, \ldots)$; il y a un entier h tel que $\beta_h \neq \beta'_h$; alors, les ensembles $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ et $p_{\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_h}$ qui contiennent respectivement A et A', n'ont aucun point commun: donc A et A' sont distincts.

Si on désigne par Q l'ensemble des points A correspondant aux points de R, on a établi entre Q et R une correspondance biunivoque et réciproque définie par la loi suivante:

Un point $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h, \ldots)$ de Q et un point $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ de R se correspondent si A est contenu dans tous les ensembles

$$p_{\beta_1}, \ p_{\beta_1, \beta_2}, \ldots p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Il est évident qu'aux points de R contenus dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ correspondent les points de Q contenus dans l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Une autre conséquence est que, si deux points B et B' de R ont en commun les h premiers termes, les points correspondants A et A' de Q ont en commun les h premiers termes; car les deux points B et B' étant contenus dans le même groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, leurs correspondants A et A' sont contenus dans le même ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, et par suite dans le même groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h)$.

Je dis que, si $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$, sont des points de R, et $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ leurs correspondants dans Q, la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$. En effet, h étant fixé, il résulte de la condition: $\lim B_\nu = B_0$ que, dès que ν sur-

passe un certain entier s, B_ν a en commun avec B_0 les h premiers termes; alors, d'après ce qui précède, A_ν a en commun avec A_0 les h premiers termes; ceci ayant lieu quel que soit h, on a: $\lim A_\nu = A_0$.

D'une manière générale, si l'on a, comme dans ce qui précède, *deux ensembles fermés P et R, si, entre les points d'un certain ensemble Q contenu dans P et les points de R existe une correspondance biunivoque, réciproque, et telle que, $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$, étant des points de R et $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ leurs correspondants dans Q, la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$, nous dirons qu'on a, entre Q et R, une correspondance biunivoque, réciproque, et continue dans le sens de R sur Q.* Nous dirons en outre que *l'ensemble (Q, R) est déduit de P*, cette double notation (Q, R) servant à rappeler que l'on envisage, non pas seulement un certain ensemble de points Q contenu dans P, mais en outre une certaine loi de correspondance entre cet ensemble et un ensemble fermé R.

Le procédé qui vient d'être exposé nous a permis de définir des ensembles déduits; nous dirons que *la suite normale*

$$K(p_{\beta_1}) \geqq K(p_{\beta_1,\beta_2}) \geqq \ldots \geqq K(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}) \geqq \ldots \tag{1}$$

détermine l'ensemble déduit (Q, R).

On reconnaît que les méthodes employées dans l'exemple des § 50—52 fournissent un cas particulier d'application du procédé général qui vient d'être exposé.

59. Signalons un cas très particulier, mais important, d'*ensemble déduit.*

Soit P un ensemble fermé, $K(p_i)$ un système normal contenu dans P. h étant donné, remplaçons chaque ensemble p_i par ses différentes portions contenues dans les différents groupes d'ordre h; désignons par K_h le système normal formé par toutes ces portions. D'après cette définition, l'ensemble des points du système K_h est identique à l'ensemble des points du système donné; de plus, chaque ensemble de K_{h+1} est contenu dans un certain ensemble de K_h; la suite de systèmes:

$$K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots \geqq K_h \geqq \ldots$$

est une suite normale de systèmes; elle détermine donc un ensemble déduit (Q, R), Q se composant de tous les points du système donné $K(p_i)$.

Remarquons qu'un ensemble fermé contenu dans P, et en particulier P lui-même, peut être considéré comme un système normal composé d'un seul ensemble, et par conséquent donne lieu à un ensemble déduit.

60. On peut obtenir des ensembles déduits au moyen d'un procédé plus général que celui du § 58, en ce sens qu'il est soumis à moins de conditions restrictives.

Soit P un ensemble fermé. Supposons qu'on ait des ensembles fermés tous contenus dans P, désignés par la notation $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, dans les conditions suivantes:

1° Les indices $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ des ensembles p forment un ensemble de groupes complet Γ.

2° L'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans l'ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h}$.

D'après cela, R étant l'ensemble de suites déterminé par l'ensemble de groupes Γ, et $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ étant un point de R, on a, d'après 1° et 2°

$$(1) \qquad p_{\beta_1} \geq p_{\beta_1, \beta_2} \geq \cdots \geq p_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h} \geq \cdots$$

3° On suppose que, quel que soit n, il y a un ensemble de (1) contenu tout entier dans un groupe d'ordre n.

Je dis que cette condition entraîne comme conséquence qu'il y a un et un seul point contenu dans les ensembles (1). En effet, faisons correspondre à chaque entier n un entier h_n qui sera le plus petit tel que l'ensemble de rang h_n de (1) soit contenu dans un groupe d'ordre n; on a évidemment $h_{n+1} \geq h_n$, et de plus, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ d'ordre n qui contient l'ensemble de rang h_n contient l'ensemble de rang h_{n+1}; donc le groupe g d'ordre $n+1$ qui contient ce dernier ensemble est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. De là résulte l'existence d'une suite déterminée d'entiers: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ telle que l'ensemble de (1) de rang h_n est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$.

Soit $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots)$; n étant fixé, le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ contient l'ensemble de rang h_n de (1) et par suite tous ceux qui suivent; donc $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ contient des points de chacun des ensembles (1). Soit p un quelconque des ensembles (1); puisque, quel que soit n, le groupe d'ordre n qui contient A contient des points de l'ensemble fermé p, A appartient à p. Ainsi A appartient à tous les ensembles (1). D'ailleurs un point qui fait partie de tous les ensembles (1) appartient en particulier aux ensembles de rang $h_1, h_2, \ldots h_n, \ldots$ donc aux groupes (α_1), $(\alpha_1, \alpha_2), \ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \ldots$ donc se confond avec A.

Ainsi il y a un et un seul point contenu dans tous les ensembles (1). A tout point $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ de R correspond un point A de P, celui qui est contenu dans les ensembles (1). Soit Q l'ensemble de tous les points A.

Faisons enfin une dernière hypothèse.

4° A deux points distincts de R, B et B', correspondent par la loi 3° deux points distincts A et A' de P.

Il y a ainsi, entre Q et R, une correspondance biunivoque et réciproque; je dis que cette correspondance est continue dans le sens de R sur Q. Soit en effet, $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$ des points de R, soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ leurs correspon-

dants dans Q. Supposons qu'on ait $\lim B_\nu = B_0$. Soit $B_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ et $A_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Le point A_0 est contenu dans les ensembles:

$$(1) \qquad p_{\beta_1} \geqq p_{\beta_1, \beta_2} \geqq \ldots \geqq p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \ldots$$

D'après la condition 3°, quel que soit n, il y a un entier h tel que l'ensemble de rang h de (1) est contenu dans un groupe d'ordre n, lequel, devant contenir A_0, est nécessairement $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Puisque $\lim B_\nu = B_0$, dès que ν depasse une certaine valeur, B_ν est contenu dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, et par suite A_ν est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h}$, donc dans $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Ceci ayant lieu quel que soit n, on a: $\lim A_\nu = A_0$. Donc la correspondance est continue dans le sens de R sur Q, et on peut dire que (Q, R) est un ensemble déduit de P.

61. Faisons maintenant une étude inverse de la précédente. Partons des hypothèses suivantes: *on a un ensemble fermé P, un ensemble (Q, R) déduit de P, c'est-à-dire un ensemble Q contenu dans P et correspondant à un ensemble fermé R suivant une loi biunivoque, réciproque et continue dans le sens de R sur Q.*

Soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R; aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ correspondent dans Q des points dont je désigne l'ensemble par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Le dérivé d'ordre 0 de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est contenu dans P, qui est fermé et contient Q; je désigne $Q^0_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ par $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Ainsi, $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ est un ensemble fermé contenu dans P et tel que tout groupe contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

D'ailleurs, si on considère deux groupes relatifs à R dont le second est contenu dans le premier, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ et $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1})$, il est évident que $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, et par suite $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Cela posé, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$ un point de R, et soit A le point correspondant de Q. Considérons les ensembles:

$$(1) \qquad P_{\beta_1} \geqq P_{\beta_1, \beta_2} \geqq \ldots \geqq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geqq \ldots$$

Le point A est contenu dans tous les ensembles $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, par suite dans tous les ensembles (1). Je dis qu'il n'y a pas d'autre point contenu dans tous les ensembles (1); pour le prouver, je vais montrer que si un point $A' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ est contenu dans tous les ensembles (1), il coïncide avec A.

Quel que soit h, A' est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; donc, chacun des groupes contenant A', à savoir: (α_1), (α_1, α_2), $\ldots (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i)$, $\ldots$ contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Nous pouvons donc prendre:

dans (α_1), un point A_1 de Q_{β_1};

dans (α_1, α_2), un point A_2 de Q_{β_1, β_2};

. . . .

dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h)$, un point A_h de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$;

. . . .

et ainsi indéfiniment.

Puisque A_h et tous les points qui suivent, A_{h+1}, etc. . . ., sont contenus dans le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h)$, on a: $\lim A_h = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_h, \dots) = A'$. D'autre part, soit $B_1, B_2, \dots B_h, \dots$ les points de R correspondant à $A_1, A_2, \dots A_h, \dots$ Comme A_h appartient à $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, B_h appartient à $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)$, d'où résulte: $\lim B_h = (\beta_1, \beta_2, \dots) = B$. Or, d'après la loi de correspondance, $\lim B_h = B$ entraîne: $\lim A_h = A$; on vient de voir que: $\lim A_h = A'$; donc A' coïncide avec A, et A est l'unique point contenu dans tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$. Nous sommes donc parvenus au résultat suivant:

I. *Si (Q, R) est un ensemble déduit de P, Q est constitué comme il suit. On a des ensembles fermés contenus dans P, désignés par la notation $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, dans les conditions suivantes:*

1° $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \beta_{h+1}}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$.

2° Etant donnée une suite infinie d'ensembles telle que:

$$P_{\beta_1} \geq P_{\beta_1, \beta_2} \geq \dots \geq P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h} \geq \dots, \tag{1}$$

il y a un et un seul point contenu dans tous ces ensembles. L'ensemble de tous les points ainsi obtenus est l'ensemble Q.

Complétons ce résultat par quelques remarques.

Soit toujours $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots)$ le point unique contenu dans les ensembles (1).

II. Je dis que, *quel que soit n, les ensembles* (1) *sont, à partir d'un certain rang, tous contenus dans le groupe* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$. Remarquons d'abord que, n étant fixé, si un ensemble de (1) est contenu dans $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, il en est de même des ensembles (1) qui suivent. Cela posé, admettons que la proposition II soit inexacte; il y a donc une certaine valeur de n telle qu'aucun des ensembles (1) n'est contenu dans le groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$; alors, quel que soit h, $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ contient au moins un point extérieur à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, on peut prendre un groupe contenant un tel point et qui soit extérieur à $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$; ce groupe, contenant un point de $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, contient au moins un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$; donc, en résumé, quel que soit h, on peut trouver un point M_h de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ qui soit ex-

térieur au groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. En faisant $h = 1, 2, \ldots$, on a des points $M_1, M_2, \ldots$ appartenant respectivement à Q_{β_1}, $Q_{\beta_1, \beta_2}, \ldots$, par suite à Q; les correspondants de ces points dans R, soit $N_1, N_2, \ldots$ appartiennent donc respectivement aux groupes (β_1), $(\beta_1, \beta_2), \ldots$; on a donc: $\lim N_i = (\beta_1, \beta_2, \ldots) = B$, d'où résulte, d'après la loi de correspondance, $\lim M_i = A$, puisque A correspond à B; mais cela est impossible, puisque les points M_i sont tous extérieurs au groupe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ qui contient A; il y a donc contradiction. La proposition II est donc établie.

On en déduit la conséquence suivante, concernant l'ensemble de tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

III. *Etant donné un ensemble $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, si un groupe g est relatif à cet ensemble, on peut trouver un ensemble P à h' indices $(h' \geq h)$ contenu à la fois dans g et dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.*

En effet, on peut d'abord, dans le groupe g qui contient des points de $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, prendre un point A de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; ce point est contenu dans une suite d'ensembles P désignés de la manière suivante:

$$(2) \qquad P_{\beta_1} \geq \ldots \geq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h} \geq P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \beta_{h+1}} \geq \ldots$$

D'après II, à partir d'un certain rang, les ensembles (2) sont tous contenus dans g qui est un groupe contenant A; il en résulte la proposition III.

IV. *Si R est parfait, tous les ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ sont parfaits.*

En effet, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R; l'ensemble $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$ qui est une portion de R, est parfait. Soit A un point de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, soit B son correspondant dans $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$; puisque $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$ est parfait, on peut trouver une suite de points de cet ensemble tous distincts de B et tendant vers B, soit $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$; soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ les points correspondants de $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$ dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; ces points sont tous distincts de A et tendent vers A; le résultat étant valable pour tout point A de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, cet ensemble est dense en lui-même, et son dérivé d'ordre 0, $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, est parfait.

62. Considérons une suite normale de systèmes (Cf. § 58):

$$(1) \qquad K(p_{\beta_1}) \geq K(p_{\beta_1, \beta_2}) \geq \ldots \geq K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}) \geq \ldots$$

(Pour abréger, nous désignerons aussi $K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h})$ par K_h).

La suite normale (1) détermine un ensemble déduit (Q, R) [Cf. § 58], et, étant donné (Q, R), on a défini par les méthodes du § 61, des ensembles $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ qui sont parfaitement déterminés.

Remarquons que $P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$ est contenu dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$. En effet, les points de Q qui correspondent aux points de $D[R, (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)]$ constituent, d'après le § 61, l'ensemble $Q_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, et d'autre part, sont contenus dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$; donc ce dernier ensemble contient $Q_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, et, étant fermé, contient le dérivé d'ordre o de $Q_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, c'est-à-dire $P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$.

h étant fixé, désignons par $S_h\,(Q, R)$ le système des ensembles $P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$; chaque ensemble $P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$ étant contenu dans l'ensemble $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$ correspondant, le système $S_h\,(Q, R)$ est un système normal d'ordre h; comme on a $P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h,\beta_{h+1}} < P_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$, le système $S_{h+1}\,(Q, R)$ est contenu dans $S_h\,(Q, R)$. En rapprochant ces résultats de la proposition I, on reconnaît que la suite:

$$(2) \qquad S_1\,(Q, R) > \ldots > S_h\,(Q, R) \geq \ldots$$

est une suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (Q, R). Quand on part de la suite (1), la suite (2) est parfaitement déterminée; nous dirons que c'est *la suite normale enveloppant l'ensemble déduit* (Q, R).

63. Soit (Q, R) un ensemble déduit de l'ensemble fermé P. Etant donnés des points $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ appartenant à Q, nous dirons que, *dans l'ensemble déduit* (Q, R), *la suite* $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ *tend vers* A_0, *ou qu'on a: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R) *si,* $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots B_0$ *étant les points correspondants de* $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$, *dans* R, *on a: lim* $B_\nu = B_0$.

Soit une suite normale de systèmes:

$$K\,(p_{\beta_1}) > \ldots > K\,(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}) > \ldots$$

déterminant un ensemble déduit (Q, R). Je dis que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R) *est qu'on ait: lim* $A_\nu = A_0$ *dans chacun des systèmes* $K\,(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h})$.

Conservons les notations du § 62.

Supposons d'abord qu'on ait: lim $A_\nu = A_0$ dans (Q, R); cela veut dire qu'on a: lim $B_\nu = B_0$. Soit $B_0 = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$. h étant fixé, B_ν, dès que ν dépasse une certaine valeur, est contenu dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, et alors A_ν fait partie de $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$. Comme d'ailleurs, la condition: lim $B_\nu = B_0$ entraîne: lim $A_\nu = A_0$ (au sens ordinaire), on a: lim $A_\nu = A_0$ dans le système $K\,(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h})$. Cela étant vrai quel que soit h, on voit que la condition de l'énoncé est nécessaire.

Supposons maintenant qu'on ait, quel que soit h: lim $A_\nu = A_0$ dans $K\,(p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h})$. Le point A_0 fait partie des ensembles:

$$P_{\beta_1}; \quad P_{\beta_1,\beta_2}; \quad P_{\ldots}; \quad ; \quad \ldots$$

h étant fixé, la condition: $\lim A_\nu = A_0$ dans $K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h})$ montre que, dès que ν dépasse une certaine valeur, A_ν est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, et par suite B_ν est contenu dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$; ceci ayant lieu quel que soit h, on a: $\lim B_\nu = B_0$, c'est-à-dire: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). La condition est donc suffisante.

64. Soit P un ensemble fermé; soit (Q, R) et (Q', R') deux ensembles déduits de P. Nous dirons que (Q', R') *est contenu dans* (Q, R) *si:* 1° Q' *est contenu dans* Q*;* 2° *si,* $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ *étant des points appartenant à* Q' (*et par suite à* Q), *la condition: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q', R') *entraîne: lim* $A_\nu = A_0$ *dans* (Q, R).

Indiquons un cas, que nous rencontrerons ultérieurement, dans lequel ces conditions sont réalisées.

Supposons qu'on ait deux suites normales de systèmes:

$$(1) \qquad K_1 \geqq K_2 \geqq \ldots K_h \geqq \ldots$$

$$(2) \qquad K'_1 \geqq K'_2 \geqq \ldots K'_h \geqq \ldots$$

déterminant respectivement deux ensembles déduits (Q, R) et (Q', R'), et telles que, pour toutes les valeurs de h à partir d'un certain entier s, on ait:

$$(3) \qquad K_h > K'_h, \quad (h \geqq s).$$

Je dis que (Q', R') est contenu dans (Q, R).

En effet, d'abord les points de Q', appartenant à tous les systèmes K'_h, appartiennent, d'après (3), à tous les systèmes K_h pour $h \geqq s$ et par suite à tous les systèmes (1), donc aussi à Q qui se compose des points appartenant à tous les systèmes (1).

En second lieu, soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points de Q' tels qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q', R'). Il en résulte, d'après le § 63 (condition nécessaire), qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (2): $K'_1, K'_2, \ldots$ Par suite de la condition (3), on a aussi: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (1) pour $h \geqq s$, et par suite pour toute valeur de h. D'après le § 63 (condition suffisante), cela prouve qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). La proposition est donc démontrée.

65. Supposons qu'on ait des ensembles déduits de l'ensemble fermé P, en nombre infini dénombrable (ou fini):

$$(1) \qquad (Q_1, R_1), \ (Q_2, R_2), \ldots (Q_n, R_n), \ldots$$

Proposons-nous de former un nouvel ensemble déduit de P, (Q, R) ayant les deux propriétés suivantes:

1° Q se compose des points appartenant à $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$

2° Si $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ sont des points de Q, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R) est qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des ensembles déduits (Q_n, R_n).

Nous dirons *que* (Q, R) *est l'ensemble déduit plus grand commun diviseur des ensembles déduits* (1).

Nous allons former (Q, R) dans le cas où chacun des ensembles déduits (1) est déterminé par une suite normale. Soit:

$$K_{1,n} \geq K_{2,n} \geq \ldots \geq K_{h,n} \geq \ldots \tag{2}$$

une suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (Q_n, R_n).

Considérons le tableau:

$$\left\{\begin{array}{l} K_{1,1} \geq K_{2,1} \geq \ldots \geq K_{h,1} \geq \ldots \\ K_{1,2} \geq K_{2,2} \geq \ldots \geq K_{h,2} \geq \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{1,n} \geq K_{2,n} \geq \ldots \geq K_{h,n} \geq \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{3}$$

Désignons par Σ_1 le système $K_{1,1}$; soit $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ les ensembles dont il se compose. Soit Σ_2 le système plus grand commun diviseur des deux systèmes $K_{2,1}$ et $K_{2,2}$; tout ensemble faisant partie de Σ_2 est contenu dans un ensemble de $K_{2,1}$, par suite dans un ensemble de $K_{1,1}$ ou Σ_1; donc Σ_2 est contenu dans Σ_1; désignons les ensembles de Σ_2 par la notation $p_{i,j}$, en observant la condition que $p_{i,j}$ soit contenu dans p_i. D'une manière générale, soit Σ_h le système normal plus grand commun diviseur des systèmes:

$$K_{h,1},\ K_{h,2}, \ldots K_{h,h}. \tag{4}$$

Σ_{h+1} sera le plus grand commun diviseur des systèmes:

$$K_{h+1,1},\ K_{h+1,2}, \ldots K_{h+1,h},\ K_{h+1,h+1}. \tag{5}$$

Un ensemble déterminé p faisant partie de Σ_{h+1} est contenu dans certains ensembles faisant respectivement partie des h premiers systèmes (5), par suite dans certains ensembles faisant respectivement partie des systèmes (4), donc enfin est contenu dans un ensemble de Σ_h. Ainsi Σ_{h+1} est contenu dans Σ_h; on peut désigner les ensembles de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_h, \ldots$ par la notation $p_{\beta_1}, p_{\beta_1,\beta_2}, \ldots p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}, \ldots$ en observant la condition que $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h,\beta_{h+1}}$ soit contenu dans $p_{\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_h}$. En outre, Σ_h, contenu dans les systèmes (4) qui sont d'ordre h, est d'ordre h. En résumé, on a défini une suite normale de systèmes:

$$\Sigma_1 \geqq \Sigma_2 \geqq \ldots \geqq \Sigma_h \geqq \ldots \tag{6}$$

Cette suite détermine un ensemble déduit (Q, R).

Si on considère une ligne quelconque du tableau (3), par exemple la n^{me}, en comparant les deux suites:

$$\begin{cases} K_{1,n} \geqq K_{2,n} \geqq \ldots \geqq K_{n,n} \geqq \ldots \geqq K_{h,n} \geqq \ldots \\ \Sigma_1 \geqq \Sigma_2 \geqq \ldots \geqq \Sigma_n \geqq \ldots \geqq \Sigma_h \geqq \ldots \end{cases}$$

on reconnaît que pour $h \geqq n$, Σ_h est contenu dans $K_{h,n}$. Il en résulte que (Q, R) est contenu dans (Q_n, R_n). Ainsi (Q, R) est contenu dans tous les ensembles déduits (Q_n, R_n). Je dis que (Q, R) satisfait aux conditions imposées au plus grand commun diviseur des (Q_n, R_n).

En effet, d'abord un point appartenant à $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, \ldots$ appartient à tous les systèmes du tableau (3); quel que soit h, il appartient à tous les systèmes (4), donc à Σ_h; donc, appartenant à tous les systèmes Σ_h de (6), il appartient à Q. Réciproquement, si un point appartient à Q, il appartient à tous les systèmes Σ_h de (6), donc, quel que soit h, aux systèmes (4); si on considère alors la n^{me} ligne du tableau (3), le point en question appartient aux systèmes de cette ligne à partir d'un certain rang, donc à tous ces systèmes, donc à Q_n, et cela quel que soit n.

Soit maintenant $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots A_0$ des points de Q. Supposons d'abord qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des ensembles déduits (Q_n, R_n). D'après le § 63, il en résulte qu'on a: $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (2), par suite dans chacun des systèmes du tableau (3), par suite, quel que soit h, dans chacun des systèmes (4), par suite, d'après le § 57, dans Σ_h quel que soit h, par suite dans chacun des systèmes de (6), par suite enfin, d'après le § 63, dans (Q, R).

Réciproquement, supposons qu'on ait: $\lim A_\nu = A_0$ dans (Q, R). Il en résulte qu'on a, d'après le § 63, $\lim A_\nu = A_0$ dans Σ_h quel que soit h, donc $\lim A_\nu = A_0$ dans chacun des systèmes (4), quel que soit h. Considérons alors la n^{me} ligne du tableau (3), autrement dit la suite normale (2); d'après ce qu'on vient de voir, on a $\lim A_\nu = A_0$ dans tous les systèmes $K_{n,n}, K_{n+1,n}, \ldots$, par suite dans tous les systèmes (2), par suite dans (Q_n, R_n), et cela quel que soit n. La proposition est donc démontrée.

66. Soit, dans un ensemble fermé P, un ensemble déduit (Q, R), que nous supposons défini d'une manière absolument quelconque. Utilisons les résultats du § 61; $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ étant un groupe relatif à R, on désigne par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h}$ l'ensemble des points de Q correspondant aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, par $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ le dérivé d'ordre 0 de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. D'après la proposition I

du § 61, Q est l'ensemble des points dont chacun est contenu dans une suite telle que:

$$P_{\beta_1}, \quad P_{\beta_1, \beta_2}, \quad \ldots \quad P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \quad \ldots$$

Le système $K(P_{\beta_1})$, constitué par les ensembles P à un seul indice, n'est pas nécessairement normal, car les ensembles P_{β_1} ne sont assujettis à aucune condition; au moyen du procédé du § 54, nous pouvons remplacer ce système par un système normal d'ordre 1, contenant les mêmes points; soit $K(\Pi_{\gamma_1})$ ce système.

Π_{γ_1} étant un ensemble quelconque, mais déterminé, du système $K(\Pi_{\gamma_1})$, considérons tous les ensembles à deux indices, P_{β_1, β_2}; prenons la partie commune à chacun de ces ensembles et à Π_{γ_1}; le système formé par ces parties communes, qui est contenu dans Π_{γ_1}, peut être remplacé, au moyen du procédé du § 54, par un système normal d'ordre 2 contenant les mêmes points, et dont nous désignerons les ensembles par Π_{γ_1, γ_2}.

D'une manière générale, $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ étant défini, nous considérons les parties communes à cet ensemble et aux différents ensembles P à $h+1$ indices; nous remplaçons le système de ces parties communes par un système normal d'ordre $h+1$ contenant les mêmes points, et dont nous désignons les ensembles par la notation $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h, \gamma_{h+1}}$. On a ainsi une suite normale de systèmes:

$$K(\Pi_{\gamma_1}) \geqq K(\Pi_{\gamma_1, \gamma_2}) > \ldots > K(\Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}) \quad \ldots$$

qui détermine un ensemble déduit (Q', R'). Je dis que l'ensemble Q dont on est parti est contenu dans Q'. En effet, soit A un point de Q; il correspond à un certain point B de R, soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$; A est contenu dans les ensembles

$$P_{\beta_1}, P_{\beta_1, \beta_2}, \ldots P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Etant contenu dans P_{β_1}, A fait partie d'un ensemble bien déterminé Π_{γ_1}; appartenant à Π_{γ_1} et à P_{β_1, β_2}, il fait partie d'un ensemble bien déterminé Π_{γ_1, γ_2}, d'après la définition de ces ensembles; en continuant le raisonnement, on reconnaît que A fait partie d'une suite bien déterminée d'ensembles

$$\Pi_{\gamma_1} > \Pi_{\gamma_1, \gamma_2} \geqq \ldots \geqq \Pi_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h} \quad \ldots$$

Donc A fait partie de Q'.

Par le procédé qui vient d'être exposé, *on a remplacé l'ensemble déduit* (Q, R) *par un ensemble déduit* (Q', R') *déterminé par une suite normale de systèmes, l'ensemble nouveau* Q' *contenant l'ensemble donné* Q.

67. Soit P un ensemble fermé; soit (Q, R) un ensemble déduit de P; soit (T, U) un ensemble déduit de l'ensemble fermé R. A un point C de U correspond, par la loi de correspondance entre T et U [disons, en abrégé, par la loi (T, U)], un point B de T. Au point B contenu dans T, et par suite dans R, correspond, par la loi de correspondance (Q, R), un point A de Q; soit V l'ensemble des points A ainsi obtenus; V est contenu dans Q, et par suite dans P. Nous pouvons considérer comme établie une correspondance biunivoque et réciproque entre les points C de U et les points A de V, par l'intermédiaire des points B de T: un point C de U et un point A se correspondent s'il y a un point B de T tel que A et B se correspondent par la loi (Q, R), et B et C par la loi (T, U).

Cette correspondance entre V et U est continue dans le sens de U sur V; car, en désignant par A_ν, B_ν, C_ν $(\nu = 1, 2, \dots, 0)$, trois points correspondants: A_ν dans V, B_ν dans T, C_ν dans U, la condition: $\lim C_\nu = C_0$ entraîne: $\lim B_\nu = B_0$ d'après la loi (T, U), et la condition: $\lim B_\nu = B_0$ entraîne: $\lim A_\nu = A_0$ d'après la loi (Q, R).

En résumé, on peut dire que (V, U) est un ensemble déduit de P, la loi de correspondance résultant des deux correspondances (Q, R) et (T, U). *On dira que* (Q, R) *et* (T, U) *sont deux ensembles déduits successifs*, et que l'ensemble déduit (V, U) est l'ensemble déduit résultant de (Q, R) et (T, U). Il est évident que (V, U) est contenu dans (Q, R).

68. Particularisons la question qui précède. Soit, dans l'ensemble fermé P, une suite normale de systèmes:

$$(1) \qquad K(p_{\beta_1}) \geq K(p_{\beta_1, \beta_2}) \geq \dots \geq K(p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}) \geq \dots$$

Elle détermine un ensemble déduit (Q, R).

En désignant, comme précédemment, par $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ l'ensemble des points de Q correspondant aux points de R contenus dans le groupe $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h)$, par $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ le dérivé d'ordre 0 de $Q_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$, on a vu que $P_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$ est contenu dans $p_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}$.

Donnons-nous maintenant, dans l'ensemble fermé R, une suite normale de systèmes:

$$(2) \qquad K(r_{\gamma_1}) \geq K(r_{\gamma_1, \gamma_2}) \geq \dots > K(r_{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h}) \quad \dots$$

Elle détermine un ensemble déduit (T, U). Soit $T_{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h}$ l'ensemble des points de R qui correspondent aux points de U contenus dans $(\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h)$; l'ensemble $T_{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_h}$, contenu dans R, est d'autre part contenu dans un certain groupe d'ordre h, (à cause du fait que T est déterminé par une suite normale; cf. § 58);

soit $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ ce groupe. Par la loi (Q, R), aux points de R contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, correspondent dans Q les points de $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$; donc, par cette même loi (Q, R), aux points de $T_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ correspondent dans Q des points, dont l'ensemble est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$. Mais ce dernier ensemble n'est autre que l'ensemble des points de P qui, par la loi résultante (V, U), correspondent aux points de U contenus dans $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h)$; désignons-le par $V_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$, et son dérivé d'ordre o par $W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$. On voit que $V_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ est contenu dans $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, par suite $W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h}$ est contenu dans $P_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, a fortiori dans $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$.

Le système des ensembles W à h indices n'est pas normal, car rien n'indique que deux ensembles W à h indices n'ont aucun point commun.

Appliquons le procédé du § 66 à l'ensemble (V, U) déduit de P, de façon à obtenir un nouvel ensemble déduit (V', U') déterminé par une suite normale de systèmes, et tel que V soit contenu dans V'. Dans l'application de ce procédé, on remplace le système $K(W_{\gamma_1})$ des ensembles W à un indice par un système normal $K(\Theta_{\delta_1})$ contenant les mêmes points, et d'une manière générale le système des ensembles W à h indices $K(W_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_h})$ par un système normal $K(\Theta_{\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_h})$ contenant les mêmes points.

Comme, d'après ce qu'on vient de voir, chaque ensemble W à h indices est contenu dans un ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ déterminé, il en résulte que chaque ensemble $\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}$, qui est compris dans un certain ensemble W à h indices (d'après le procédé du § 66), est contenu dans un ensemble $p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ déterminé. On obtient ainsi une suite normale de systèmes:

$$(3) \qquad K(\Theta_{\delta_1}) \geq K(\Theta_{\delta_1, \delta_2}) \geq \ldots > K(\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}) \geq \ldots$$

déterminant l'ensemble déduit (V', U'), avec en outre cette condition que chaque système de (3) est contenu dans le système de même rang de (1), c'est-à-dire que:

$$K(\Theta_{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_h}) \leq K(p_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}).$$

Le résultat de cette étude peut s'exprimer ainsi: *On a, dans un ensemble fermé P, un ensemble déduit (Q, R) déterminé par une suite normale* (1)*; dans R, un ensemble déduit (T, U) déterminé par une suite normale; il en résulte un ensemble déduit de P, (V, U). On peut remplacer (V, U) par un ensemble déduit (V', U') déterminé par une suite normale* (3) *dont chaque système est contenu dans le système de même rang de* (1), *et telle que V est contenu dans V'.*

CHAPITRE VII.

Fonctions de classe $\leqq 3$.

69. Nous allons appliquer les notions nouvelles acquises dans le précédent chapitre à la théorie des fonctions. Faisons d'abord quelques remarques.

Soit f une fonction définie sur un ensemble fermé P. Soit (Q, R) un ensemble déduit de P. Considérons la fonction φ définie sur l'ensemble fermé R par la condition d'être égale, en chaque point B de R, à la valeur de f au point A de Q qui correspond à B. Nous dirons que φ est la transformée de f sur (Q, R).

I. Si A est un point de Q où f est continue par rapport à P, φ est, au point B de R correspondant à A, continue par rapport à R. En effet, soit $B_1, B_2, \ldots B_\nu, \ldots$ une suite de points de R tendant vers B, soit $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \ldots$ leurs correspondants dans Q; d'après la loi de correspondance, la condition: $\lim B_\nu = B$ entraîne: $\lim A_\nu = A$; cette dernière condition, en vertu de la continuité de f en A, entraîne: $\lim f(A_\nu) = f(A)$, ce qui peut s'écrire, d'après la définition de φ: $\lim \varphi(B_\nu) = \varphi(B)$. Cette dernière condition exprime que φ est continue en B par rapport à R.

II. Si on a, sur P, une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers f, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots \varphi$, sont les transformées sur (Q, R) de $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots f$, la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ tend vers φ. En effet, B étant un point quelconque de R et A son correspondant dans Q, on a, d'après l'hypothèse, la condition: $\lim f_n(A) = f(A)$, qui s'écrit: $\lim \varphi_n(B) = \varphi(B)$.

III. Soit f une fonction de classe α sur P. Je dis que φ est de classe $\leqq \alpha$ sur R.

La proposition a lieu pour $\alpha = 0$, puisque, f étant continue sur P en tout point A de Q, il en résulte, d'après I, que φ est continue en tout point B de R.

Admettons la proposition pour les nombres inférieurs à un nombre déterminé α, et démontrons-la pour α. f, étant de classe α, est limite d'une suite de fonctions de classes inférieures à α, soit: $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ Les transformées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ de ces fonctions sur (Q, R) sont, d'après la proposition admise, de classes inférieures à α, et, d'après II, tendent vers φ; donc φ est de classe $\leqq \alpha$.

IV. Il résulte de III que si f appartient à E sur P, φ appartient sur R à E, et par suite, satisfait, sur tout ensemble parfait contenu dans R, à la condition fondamentale: $m[\omega'(f)] = 0$. Nous obtenons ainsi une condition nécessaire nouvelle pour qu'une fonction appartienne à E, condition qui englobe celle que nous connaissions jusqu'ici, mais qui est plus complète et qu'on peut énoncer ainsi:

Pour qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P appartienne à E, il faut que, (Q, R) étant un ensemble déduit quelconque de E, et φ la transformée de f sur (Q, R), φ satisfasse sur tout ensemble parfait contenu dans R à la condition $m(\omega'(\varphi)) = 0$. Pour abréger le langage, nous exprimerons cette condition en disant que f *satisfait sur P à la condition fondamentale généralisée.* De plus, pour simplifier l'écriture, nous cesserons de désigner la transformée de f sur (Q, R) par une lettre différente de f, et nous dirons simplement que nous considérons la fonction f sur (Q, R), ou même simplement sur R.

70. Soit f une fonction définie sur l'ensemble fermé P et satisfaisant à la condition fondamentale généralisée.

Nous définirons des ensembles déduits de P correspondant aux nombres ordinaux des classes I et II:

$$(1) \qquad (P_0, R_0),\ (P_1, R_1), \ldots (P_n, R_n), \ldots (P_\omega, R_\omega), \ldots (P_\alpha, R_\alpha), \ldots,$$

chacun de ces ensembles déduits étant déterminé par une suite normale de systèmes qui sera une suite normale enveloppant l'ensemble considéré (Cf. § 62), soit, pour l'ensemble (P_α, R_α), la suite normale

$$(2) \qquad K_1(P_\alpha),\ K_2(P_\alpha), \ldots K_h(P_\alpha), \ldots$$

En même temps, nous définirons certaines fonctions de classe ≤ 1: $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n, \ldots \varphi_\omega, \ldots \varphi_\alpha, \ldots$ respectivement définies sur les ensembles fermés $R_0, R_1, \ldots R_n, \ldots R_\omega, \ldots R_\alpha, \ldots$ Nous considérerons aussi ces fonctions respectivement sur les ensembles $P_0, P_1, \ldots P_n, \ldots P_\omega, \ldots P_\alpha, \ldots$

Les ensembles déduits (1) et les fonctions φ seront définis si nous réalisons les trois opérations suivantes: 1° Définition de (P_0, R_0); 2° Connaissant (P_α, R_α), définition de φ_α et de $(P_{\alpha+1}, R_{\alpha+1})$; 3° Définition de (P_α, R_α) quand α est de deuxième espèce.

1° P_0 et R_0 sont identiques à P; (c'est seulement pour la symétrie des notations que nous employons les lettres P_0 et R_0). Nous avons fait remarquer, au § 59, que l'ensemble fermé P pouvait être considéré comme déduit de lui-même. La suite normale de systèmes déterminant l'ensemble déduit (P_0, R_0) sera définie comme il suit: $K_h(P_0)$ désigne le système constitué par les portions de P contenues dans les différents groupes d'ordre h relatifs à P.

2° Supposons défini (P_α, R_α), ainsi que la suite normale (2) enveloppant (P_α, R_α). Comme (P_α, R_α) est un ensemble déduit de P, la fonction f, considérée sur R_α, satisfait à la condition fondamentale; il existe donc une fonction φ_α définie sur R_α (et que nous considérerons aussi sur P_α), de classe < 1 sur R_α,

et telle que l'ensemble H_α des points de R_α où l'on a: $f \neq \varphi_\alpha$ est de première catégorie par rapport à R_α^Ω. Remplaçons H_α par un système d'ensemble fermés contenant tous les points de H_α; les points de ce système forment, si l'on emploie le procédé du § 59, un ensemble déduit de R_α, soit (S_α, T_α); des deux ensembles déduits successifs, (P_α, R_α) déduit de P, et (S_α, T_α) déduit de R_α résulte un ensemble déduit de P, soit $(\Sigma_\alpha, T_\alpha)$, Σ_α étant contenu dans P_α et contenant les points correspondant à H_α d'après la loi (P_α, R_α); par le procédé du § 68, on peut remplacer $(\Sigma_\alpha, T_\alpha)$ par un ensemble déduit $(P_{\alpha+1}, R_{\alpha+1})$ déterminé par une suite normale S dont chaque système est contenu dans le système de même rang de la suite normale (2) déterminant (P_α, R_α), et de plus $P_{\alpha+1}$ contenant Σ_α; enfin on remplace la suite normale S par la suite enveloppant $(P_{\alpha+1}, R_{\alpha+1})$, soit $K_h(P_{\alpha+1})$ le h^{me} système de cette suite; d'après la condition qui vient d'être énoncée, quel que soit h, on a:

$$K_h(P_\alpha) \geqq K_h(P_{\alpha+1}).$$

D'autre part, $P_{\alpha+1}$ contient Σ_α, par suite tous les points de P correspondant à H_α dans la correspondance (P_α, R_α); donc, en tout point de $P_\alpha - P_{\alpha+1}$, on a: $f = \varphi_\alpha$.

3° Si α est de deuxième espèce, on prend une suite de nombres $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $\ldots < \alpha_n < \ldots$ tendant vers α. Par définition, (P_α, R_α) sera l'ensemble déduit plus grand commun diviseur des ensembles déduits:

$$(P_{\alpha_1}, R_{\alpha_1}),\ (P_{\alpha_2}, R_{\alpha_2}), \ldots (P_{\alpha_n}, R_{\alpha_n}), \ldots$$

Cet ensemble sera obtenu par le procédé du § 65. Il en résulte que P_α est l'ensemble des points communs à tous les $P_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

Ainsi se trouvent définis les ensembles déduits (P_α, R_α) et les fonctions φ_α, ainsi que les suites normales déterminant les différents ensembles déduits (P_α, R_α). Il est à remarquer qu'il entre une certaine part d'arbitraire dans ces définitions.

Faisons la remarque suivante. Si β et γ sont deux nombres ordinaux, avec $\beta < \gamma$, on a évidemment $(P_\beta, R_\beta) \geqq (P_\gamma, R_\gamma)$; en outre, si on considère les deux suites normales déterminant respectivement (P_β, R_β) et (P_γ, R_γ):

$$\begin{gathered} K_1(P_\beta),\ K_2(P_\beta), \ldots\ K_h(P_\beta)\ \ldots \\ K_1(P_\gamma),\ K_2(P_\gamma), \ldots\ K_h(P_\gamma), \ldots \end{gathered}$$

qui sont respectivement des suites normales enveloppant (P_β, R_β), (P_γ, R_γ), il y a un entier n tel que pour $h > n$, on a

$$K_h(P_\beta) \geq K_h(P_\gamma).$$

On reconnaît d'abord que si cette proposition est établie d'une part pour β et γ ($\beta < \gamma$), et d'autre part pour γ et δ ($\gamma < \delta$), elle est vraie pour β et δ.

Cela posé, pour établir la proposition dans toute sa généralité, admettons-la dans le cas où β et γ sont des nombres ordinaux quelconques inférieurs à un nombre déterminé α, et démontrons-la quand on remplace γ par α. Distinguons deux cas: .

1° α est de première espèce; soit α' son précédent. La proposition a lieu pour α', α, d'après le procédé de formation exposé au 2° . Elle a lieu, par hypothèse, pour β, α', si $\beta < \alpha'$. Donc elle a lieu pour β, α, β étant quelconque et inférieur à α.

2° α est de deuxième espèce. Dans le procédé de définition 3°, on a fait choix d'une suite $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ tendant vers α, et d'après le procédé de définition de l'ensemble déduit plus grand commun diviseur, la proposition a lieu, quel que soit n, pour α_n, α. Si β est un nombre quelconque inférieur à α, il y a des nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ supérieurs à β; soit α_n l'un d'eux. La proposition a lieu, par hypothèse, pour β, α_n. Donc elle a lieu pour β, α.

La proposition est donc établie.

On en conclut immédiatement l'extension suivante: Soit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ des nombres ordinaux en nombre fini, tels que

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_p.$$

Si on considère les suites normales déterminant respectivement les ensembles déduits $(P_{\beta_1}, R_{\beta_1})$, $(P_{\beta_2}, R_{\beta_2}), \ldots (P_{\beta_p}, R_{\beta_p})$, il y a un entier n tel que, pour $h \geq n$, on a:

$$K_h(P_{\beta_1}) \geq K_h(P_{\beta_2}) > \ldots \geq K_h(P_{\beta_p}).$$

71. Je dis que, *étant donnée une fonction f sur un ensemble fermé, si, dans l'application du procédé qui vient d'être exposé, on aboutit à un ensemble déduit (P_β, R_β) tel que f est de classe $\leq$ 1 sur R_β, f est de classe $\leq$ 3 sur P.*

Résumons les conditions de la question.

On a des ensembles déduits de P correspondant aux nombres ordinaux $\leq \beta$:

$$(1) \qquad 0, 1, 2, \ldots n, \ldots \omega, \ldots \alpha, \ldots \beta,$$

soit:

$$(2) \qquad (P_0, R_0), \ldots (P_\alpha, R_\alpha), \ldots (P_\beta, R_\beta).$$

On a:

$$P_0 \geq P_1 \geq \ldots \geq P_\alpha \geq \ldots \geq P_\beta. \tag{3}$$

Soit A un point de P; on a $P_0 = P$; si A ne fait pas partie de P_β, il y a des ensembles de (3) qui ne contiennent pas A; soit γ le plus petit indice de ces ensembles; γ ne peut être de deuxième espèce, car alors tous les ensembles (3) d'indice $< \gamma$ devraient contenir A, et comme P_γ contient les points communs à tous ces ensembles, P_γ contiendrait A; donc γ est de première espèce et a un précédent α: A fait partie de P_α, sans faire partie de $P_{\alpha+1}$. On peut dire que *tout point A de P fait partie, d'une manière bien déterminée, d'un ensemble $P_\alpha - P_{\alpha+1}$*, ($P_{\alpha+1}$ n'existant pas si $\alpha = \beta$).

Enfin on a des fonctions

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_\alpha, \ldots \varphi_\beta \tag{4}$$

telles que φ_α est définie sur R_α et de classe ≤ 1; nous considérons en même temps φ_α sur P_α, la valeur de φ_α en chaque point de P_α étant, bien entendu, égale à la valeur de φ_α au point correspondant de R_α. En un point A de $P_\alpha - P_{\alpha+1}$, on a: $f = \varphi_\alpha$.

L'ensemble déduit (P_α, R_α) est déterminé par la suite normale enveloppante:

$$K_1(P_\alpha),\ K_2(P_\alpha), \ldots K_h(P_\alpha), \ldots$$

h étant fixé, si on désigne par $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ un groupe relatif à R_α, par $Q_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ l'ensemble des points de P_α correspondant aux points de R_α contenus dans $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$, on sait que le système $K_h(P_\alpha)$ est constitué par tous les ensembles fermés $Q^\circ_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, qui n'ont deux à deux aucun point commun.

La fonction φ_α est de classe ≤ 1 sur R_α; on peut donc (Ch. III), attacher à tout groupe $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h)$ relatif à R_α un nombre déterminé $\Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$ tel qu'on ait la condition suivante:

Etant donné un point de R_α, soit $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h, \ldots)$, le nombre $\varphi_\alpha(B)$ est la limite de la suite:

$$\Theta_{\beta_1}, \Theta_{\beta_1, \beta_2}, \ldots \Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}, \ldots$$

Considérons le système $K_h(P_\alpha)$; nous désignerons par $\psi_{\alpha, h}$ une fonction qui sera définie sur chacun des ensembles dont se compose $K_h(P_\alpha)$, de la manière suivante: sur l'ensemble $Q^\circ_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}$, on a:

$$\psi_{\alpha, h} = \Theta_{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_h}.$$

Ainsi nous définissons: $\psi_{a,1}$ sur chacun des ensembles de $K_1(P_a)$, $\psi_{a,2}$ sur chacun des ensembles de $K_2(P_a)$, ... $\psi_{a,h}$ sur chacun des ensembles de $K_h(P_a)$, ...

Si A est un point de P_a, A appartient à tous les systèmes $K_h(P_a)$; en désignant par $B = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h, \dots)$ le point de R_a correspondant à A, A appartient aux ensembles $Q^\circ_{\beta_1}, Q^\circ_{\beta_1, \beta_2}, \dots Q^\circ_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h}, \dots$ Donc on a:

$$\psi_{a,h}(A) = \Theta_{\beta_1, \beta_2, \dots \beta_h},$$

d'où, par suite:

$$\lim_{h=\infty} \psi_{a,h}(A) = \varphi_a(B) = \varphi_a(A). \tag{5}$$

Cela posé, rangeons les nombres ordinaux $\leq \beta$ en une suite dénombrable:

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n, \dots;$$

formons les suites limitées:

$$\begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_1, \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n \\ \dots\dots \end{matrix} \tag{6}$$

que nous écrivons ensuite dans l'ordre naturel de grandeur:

$$\begin{matrix} \delta_{1,1} \\ \delta_{1,2}, \delta_{2,2} \\ \dots \\ \delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \dots \delta_{n,n} \\ \dots\dots \end{matrix} \tag{7}$$

de telle sorte que l'ensemble des nombres de la n^{me} ligne de (7) est identique à l'ensemble de nombres $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$, et que de plus on a:

$$\delta_{1,n} < \delta_{2,n} < \dots < \delta_{n,n}. \tag{8}$$

De plus, tout nombre $\leq \beta$ fait partie, quand n dépasse une certaine valeur, de l'ensemble de nombres (8).

D'après la remarque du § 70, si on considère les n ensembles déduits correspondant aux indices: $\delta_{1,n}, \delta_{2,n}, \dots \delta_{n,n}$, il existe un entier λ_n tel que pour $h \geq \lambda_n$ on a:

$$K_h(P_{\delta_{1,n}}) > K_h(P_{\delta_{2,n}}) \geq \dots > K_h(P_{\delta_{n,n}}). \tag{9}$$

Remplaçons les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ ainsi obtenus par des nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ tels que $\mu_n \geqq \lambda_n$ et tels qu'on ait en outre:

$$(10) \qquad \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$$

Les conditions (9) sont vérifiées pour $h \geqq \mu_n$, de sorte qu'on a:

$$(11) \qquad K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) \geqq K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}) \geqq \ldots \geqq K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}}).$$

Nous allons définir sur P une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ tendant vers f. Nous définirons f_n comme il suit.

Désignons par $P - K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}})$ l'ensemble des points de P qui ne font pas partie du premier système (11), par $K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}})$ l'ensemble des points qui appartiennent au premier de ces systèmes sans appartenir au second, etc. . . Nous prendrons:

$$(12) \qquad \begin{array}{ll} \text{Sur } P - K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}): & f_n = 0. \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{1,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{1,n},\,\mu_n}. \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{2,n}}) - K_{\mu_n}(P_{\delta_{3,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{2,n},\,\mu_n}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \text{Sur } K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}}): & f_n = \psi_{\delta_{n,n},\,\mu_n}. \end{array}$$

Je dis que f_n est de classe $\leqq 2$ sur P. D'abord, sur chaque ensemble du dernier système (11), soit $K_{\mu_n}(P_{\delta_{n,n}})$, f est constante, donc de classe $\leqq 2$. Admettons que f_n soit de classe $\leqq 2$ sur chaque ensemble du h^{me} système (11); considérons alors un ensemble bien déterminé du $(h-1)^{\text{me}}$ système (11), soit Q; d'après la définition (12), f_n est égale, sur Q, à une constante, sauf aux points qui font partie du h^{me} système; or ces points constituent, dans l'ensemble Q, une infinité dénombrable d'ensembles fermés, sur chacun desquels, d'après la proposition admise, f_n est de classe $\leqq 2$; donc, par application du théorème du § 48, f_n est de classe $\leqq 2$ sur Q. En remontant ainsi de proche en proche, on établit que f_n est de classe $\leqq 2$ sur chacun des ensembles du premier système (11), et aussi sur P, par une dernière application du même théorème. Ainsi f_n est de classe < 2.

Je dis qu'en tout point A de P on a:

$$\lim f_n(A) = f(A).$$

On a vu qu'il y a un nombre $\alpha \leqq \beta$ bien déterminé tel que A fait partie de P_α et ne fait pas partie de $P_{\alpha+1}$. On a:

$$f(A) = \varphi_\alpha(A).$$

Dès que n dépasse une certaine valeur n_1, α et $\alpha + 1$ font partie de l'ensemble des nombres (8), de telle sorte qu'il y a, dans (11), deux termes consécutifs qui sont

$$K_{\mu_n}(P_\alpha) \geq K_{\mu_n}(P_{\alpha+1}).$$

A fait partie de P_α, par suite de tous les $K_{\mu_n}(P_\alpha)$; ne faisant pas partie de $P_{\alpha+1}$, il ne fait pas partie de tous les ensembles $K_h(P_{\alpha+1})$; donc, dès que h dépasse une certaine valeur q, A ne fait pas partie de $K_h(P_{\alpha+1})$; on aura $\mu_n > q$ dès que n dépassera une certaine valeur n_2. Soit n' le plus grand des entiers n_1, n_2; la condition $n > n'$ entraîne les conséquences suivantes:

Il y a, dans la suite (11), deux termes consécutifs, dont le premier est $K_{\mu_n}(P_\alpha)$, le second $K_{\mu_n}(P_{\alpha+1})$; de plus, A, qui fait partie de $K_{\mu_n}(P_\alpha)$, ne fait pas partie de $K_{\mu_n}(P_{\alpha+1})$. Donc, d'après la définition (12), pour toute valeur de $n > n'$, on a:

$$f_n(A) = \psi_{\alpha,\mu_n}(A).$$

Le raisonnement est évidemment valable pour le cas de $\alpha = \beta$, auquel cas l'ensemble $P_{\alpha+1}$ n'existe pas.

Quand n croît indéfiniment, il en est de même de μ_n, on a donc, d'après (5):

$$\lim f_n(A) = \lim \psi_{\alpha,\mu_n}(A) = \varphi_\alpha(A) = f(A).$$

Ainsi f est la limite de f_n sur P. Comme f_n est de classe < 2, *f est de classe ≤ 3.*

NOTE.

Je signale, comme travaux se rapportant à des questions connexes à celles qui sont étudiées dans le présent mémoire:

H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement (Journal de mathématiques, 1905).

M. Fréchet: Sur quelques points du calcul fonctionnel (Thèse, Paris, 1906, et Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.)

TABLE.

Deuxième partie.

ÜBER EINE VERMEINTLICHE ANTINOMIE DER MENGENLEHRE.

BRIEF AN DEN HERAUSGEBER

VON

A. SCHOENFLIES

IN KÖNIGSBERG I PR.

Im letzten Band Ihrer Acta[1] drucken Sie einen Brief von J. RICHARD ab, der auf eine neue *mengentheoretische Antinomie* hinweist. Seinen Ausführungen hat sich inzwischen auch POINCARÉ angeschlossen.[2] Um so mehr habe ich den Wunsch, darauf hinzuweisen, dass hier keine Antinomie, sondern eine Lücke in der Beweisführung vorliegt. Da Sie einer der Ersten waren, die durch Benutzung der mengentheoretischen Resultate einem ganzen Wissensgebiet neues Blut und neues Leben eingeflösst haben, so bin ich überzeugt, dass diese Lösung Ihnen sehr erwünscht sein wird. Dreierlei ist zu bemerken.

1) Herr RICHARD hat den Beweis, dass die von ihm betrachtete Menge abzählbar ist, gar nicht erbracht; *sie ist es auch nicht.* Sie wird es erst dadurch, dass er infolge einer stillschweigenden Annahme nur mit einer *Teilmenge* aller endlich definierbaren Dezimalbrüche operiert. 2) Auch seine Auflösung der Antinomie bedarf der Kritik. 3) Endlich sind Antinomieen dieser Art der Mengenlehre keineswegs eigentümlich.

1. Zunächst eine Vorbemerkung. Nach der RICHARD'schen Argumentation würde man schliessen können oder müssen, dass *Alles*, was wir durch eine endliche Zahl von Worten definieren können, abzählbar ist. Ich zweifle nicht, dass Sie dies für unrichtig halten. Benutzt doch jede Definition eines mathematischen Objectes nur eine endliche Zahl von Worten; die Gesamtheit dieser Objecte ist aber nicht abzählbar. Die Erklärung ist sehr einfach. Man kann nämlich durch

[1] Bd. 30, S. 295.

[2] Revue de métaphysique et morale, 1906.

eine und dieselbe Definition unendlich viele mathematische Objecte definieren, ja sogar eine Menge der Mächtigkeit c. Die Worte — »Man bilde eine Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 1$ in der Weise, dass man der Funktion für jeden Wert von x denselben Wert beilegt» — bilden eine wohl definierte Vorschrift und definieren eine Funktionsmenge der Mächtigkeit c.

Damit ist die Lücke der RICHARD'schen Beweisführung bereits aufgedeckt. Sein Beweis beruht nämlich auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass *jede* Definition nur je *einen* Dezimalbruch bestimmt. Er denkt sich nämlich die Menge *aller* Definitionen nach der Zahl der in sie eingehenden Buchstaben geordnet und fährt dann fort: Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième etc. On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots. Donc ils forment un ensemble dénombrable.[1]

2. Um seinen Widerspruch abzuleiten, benutzt Herr RICHARD die bekannte CANTOR'sche Methode, die den einfachsten Beweis für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums liefert. Er argumentirt folgendermassen. Ist

$$\Delta = \{\delta_\nu\} = \delta_1,\ \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

die geordnete Menge unserer Dezimalbrüche, so kann man einen neuen Dezimalbruch δ' so bestimmen, dass seine ν:te Ziffer die ν:te Ziffer von δ_ν zu 9 ergänzt.[2] Durch diese Vorschrift, die G heissen möge, ist δ' endlich definiert; andererseits ist δ' von jedem δ_ν verschieden, also in Δ nicht enthalten. Wir haben also nach RICHARD eine Antinomie. *Sie verschwindet, sobald die Nichtabzählbarkeit von Δ bewiesen ist.* Sie klärt sich aber auch in einfacher Weise auf, falls man sich auf Mengen Δ beschränkt, die tatsächlich abzählbar sind. Ich beweise zunächst das erste.

3. Dazu bringe ich das Resultat der RICHARD'schen Argumentation zunächst in folgende widerspruchsfreie Form:

Sei $D = \{d_\nu\}$ *irgend eine* abzählbare Menge endlich definierbarer Dezimalbrüche, so kann man durch eine endliche Definition einen Dezimalbruch bestimmen, der ihr nicht angehört.

Ich nehme nun noch eine Modifikation dieser Definition vor und ersetze sie durch folgende, die ich G' nenne:

Sei D eine abzählbare Menge endlich definierbarer Dezimalbrüche und

[1] Materiell gehe ich auf den Begriff der endlich definierbaren Dezimalbrüche zunächst nicht weiter ein; ich komme weiter unten (Nr. 9) auf ihn zurück.

[2] Ich habe die RICHARD'sche Definition im Interesse der Kürze etwas abgeändert.

$D' = \{d'_\nu\}$ eine unendliche *Teilmenge* von D.[1] Man bestimme mit ihr einen Dezimalbruch d'' in der Weise, dass man die ν:te Ziffer von d'_ν zu 9 ergänzt, so ist auch d'' endlich definiert.

Von dieser Definition G' werde ich sofort beweisen, dass die Menge der Dezimalbrüche, die durch sie definiert wird, die Mächtigkeit c besitzt. Der Einfachheit halber führe ich den Beweis für Dyalbrüche.

4. Ich definiere zunächst auf Grund einer einzigen Definition eine abzählbare Menge $D = \{d_\nu\}$ von Dyalbrüchen. Sie lautet:

Man bestimme einen Dyalbruch d so, dass seine ν:te Ziffer Eins ist, und jede andere Ziffer gleich Null.

Auf diese Menge D wende ich nun die oben angegebene Definition G' an, bestimme also, wenn $D' = \{d'_\nu\}$ eine Teilmenge von D ist, einen Dyalbruch d'' in der Weise, dass seine ν:te Ziffer die ν:te Ziffer von d'_ν zu 1 ergänzt.

Von der Menge $D'' = \{d''\}$ dieser Dyalbrüche beweist man nun leicht, dass sie die Mächtigkeit c hat. Um dies nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass man zu jedem beliebigen Dyalbruch δ, der nicht der abzählbaren Menge D angehört, eine geeignete Menge $D' = \{d'_\nu\}$ so bestimmen kann, dass die auf sie angewandte Vorschrift G' als Dyalbruch d'' den Dyalbruch δ liefert.

Sei also

$$\delta = 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

ein solcher Dyalbruch, so kann α_ν den Wert 0 oder 1 haben. Ist $\alpha_\nu = 0$, so muss die ν:te Ziffer von d'_ν eine Eins sein. Damit ist alsdann d'_ν bestimmt. Die Menge aller dieser Dyalbrüche $\{d'_\nu\}$, also aller derjenigen, für die $\alpha_\nu = 0$ ist, möge noch D_1 heissen. Ist zweitens $\alpha_\nu = 1$, so muss die ν:te Ziffer von d'_ν eine Null sein. Dann kann man noch auf mannigfache Art den Dyalbruch d'_ν so wählen, dass er nicht zur Menge D_1 gehört.[2] Wir können daher die Menge $D' = \{d'_\nu\}$ so bilden, dass der durch die obige Vorschrift bestimmte Dyalbruch d'' mit δ übereinstimmt.

Damit ist der Schlusstein der Deduktion vorhanden; wir haben eine endliche Definition aufgestellt, die eine *nicht abzählbare* Menge von Dyalbrüchen bestimmt.

5. Die Analogie mit solchen Mengen, bei denen sonst aus der Endlichkeit

[1] Die Reihenfolge der d'_ν bleibt willkürlich.

[2] Eine solche Möglichkeit ist z. B. die folgende. Zunächst beachte man, dass jeder Dyalbruch, der nicht zur Menge D gehört, mehr als eine Eins enthält. Enthält er eine endliche Zahl, so kann man in der Weise verfahren, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei in δ die ν_1:te, die ν_2:te und die ν_3:te Stelle eine Eins, und alle übrigen Stellen gleich Null. Dann wähle man d'_{ν_1}, d'_{ν_2}, d'_{ν_3}, so, dass — in zyklischer Vertauschung — die ν_2:te, ν_3:te, ν_1:te Stelle von ihnen eine Eins ist. Falls aber δ unendlich viele Einsen enthält, so teile man sie in Paare von je zwei konsekutiven. Stehen die beiden ersten an der ν_1:ten und ν_2:ten Stelle, so wähle man d'_{ν_1} und d'_{ν_2} so, dass — in einfacher Vertauschung — die ν_2:te und ν_1:te Stelle von ihnen eine Eins ist, und mache das gleiche für je zwei konsekutive Einsen.

gewisser Vorschriften auf die Abzählbarkeit der Menge geschlossen wird, ist hier nämlich nur eine scheinbare. Ein Dezimalbruch δ hat unendlich viele Ziffern, seine Bestimmung erfordert also eine Belegung *unendlich vieler* Stellen. Die endliche Definition eines *jeden* Dezimalbruchs enthält daher an sich immer *unendlich viele* Bestimmungsvorschriften, und hier ist die Stelle, an der die Analogie zerreisst. Offenbar ist dies der Umstand, den RICHARD übersehen hat. Denn die Möglichkeit, mit einer endlichen Zahl von Worten eine unendliche Menge von Definitionsmerkmalen auszudrücken, führt auch zu dem Resultat, dass man — naturgemäss durch Verwendung geeigneter Worte — durch eine und dieselbe Definition unendlich viele Dezimalbrüche, je sogar eine nicht abzählbare Menge definieren kann.

6. Ich gebe noch einen zweiten Beweis für die Nichtabzählbarkeit der Menge $\varDelta$. Er stützt sich auf die Theorie der Unendlich und knüpft an das von HARDY abgeleitete Resultat an, dass man aus dem Kontinuum eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ herausheben kann.[1]

Die Bestimmung einer solchen Menge kann am einfachsten durch folgende Definition geschehen: Sei

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots a_\nu,\ \ldots$$

eine Folge ganzer Zahlen, und $f(x)$ eine monoton ins unendliche wachsende stetige Funktion. Sei ferner

$$f(1) = \xi_1,\ f(2) = \xi_2,\ \ldots f(\nu) = \xi_\nu,\ \ldots$$

und seien die Zahlen a_ν so gewählt, dass a_ν die kleinste ganze Zahl ist, die grösser ist als ξ_ν. Man bilde nun einen Dyalbruch in der Weise, dass er unendlich viele Nullen enthält und zwischen der ν:ten und $(\nu + 1)$:ten Null a_ν Einsen.[2]

Der so definierte Dyalbruch ist endlich definiert. Da es nun eine nicht abzählbare Menge monotoner stetiger Funktionen mit wachsendem Unendlich gibt, so wird durch die vorstehende Definition eine nicht abzählbare Menge endlich definierbarer Dyalbrüche bestimmt.

7. Herr RICHARD gibt folgende Erklärung seiner vermeintlichen Antinomie. Er schreibt: Le Groupe G[3] existera dans mon tableau. Mais à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble $\varDelta$ et celui-ci n'est pas encore défini. Il devrait donc le biffer. Le groupe G n'a pas de sens que si l'ensemble $\varDelta$ est totalement défini et celui-ci ne peut l'être que par un nombre infini de mots. Il n'y a donc contradiction.

[1] Quart. Journ. of math. 35 (1903) p. 87.
[2] Vgl. auch F. HAUSDORFF, Leipz. Ber. 59 (1907) p. 155.
[3] d. h. die Buchstabengruppe, die die Definition G enthält.

Auch dies veranlasst mich zu einer kritischen Bemerkung. Zuvor bemerke ich, dass die Richard'sche Auflösung schon deshalb versagen muss, weil sie von der Abzählbarkeit der Menge Δ ausgeht. Meine eigene Erklärung beruht auf der Analyse aller vorhandenen Möglichkeiten; dabei sehe ich übrigens von der speziellen Bedeutung der Menge Δ ab, nehme aber naturgemäss an, dass Δ eine widerspruchsfrei definirte Menge ist. Im Sinn der Richard'schen Argumentation nehme ich ferner zunächst an, dass G eine *zur Menge Δ gehörige* Vorschrift ist. Dann sind für die Beziehung von Δ und G zu einander nur folgende zwei Fälle möglich. Erstens kann Δ tatsächlich abzählbar sein. Dann läuft die Vorschrift von G darauf hinaus, ein von *allen* Elementen von *Δ verschiedenes* Element einzuführen, das ebenfalls zur Menge Δ gehört; sie ist daher in sich *widerspruchsvoll*, und der Endwiderspruch der Argumentation beruht hierauf. Ist aber Δ nicht abzählbar, so enthält die *Vorschrift G* keinen materiellen Widerspruch; in diesem Fall stellt vielmehr die Richard'sche Argumentation einen *richtigen indirekten Beweis* dar, aus dem die Nichtabzählbarkeit von Δ zu schliessen ist. Er ist mit dem klassischen Beweis identisch, mit dem Cantor die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums beweist. *Jeder indirekte Beweis hat diesen Character.* Der Schluss, der also zu ziehen war, ist die *Nichtabzählbarkeit von Δ.*

8. Da ich meine, nicht ausführlich genug sein zu können, so frage ich noch, wie die Dinge liegen, wenn man nicht die gesamte Menge Δ ins Auge fasst sondern nur, wie oben in 4) die abzählbare Teilmenge D, und die Definition G auf sie bezieht. Die so modifizierte Definition G' ist, wie unser Beispiel in 4) zeigt, *nicht* widerspruchsvoll. Ja, eine an sich widerspruchsfreie Definition, die sich auf unendlich viele Dezimalbrüche bezieht, kann sogar bei dem Richard'schen Verfahren vorher auftreten, ehe diese unendlich vielen Dezimalbrüche sämtlich definiert sind, ohne dass sie deshalb widerspruchsvoll wird (Nr. 10). In der Tat hat die Reihenfolge, in der die Definitionen sich einstellen, gar keine Bedeutung, wenn nur ihre Gesamtheit in sich widerspruchsfrei ist. Wird es verlangt, so kann man sie so umordnen, dass keine Definition sich auf solche bezieht, die ihr folgen; der Ordnungstypus wird naturgemäss transfinit.

9. Ich gehe nun zu dem eigentlich Richard'schen Fall über, nehme also an, dass jede Definition nur *einen* Dezimalbruch δ bestimmt; doch gelten die folgenden Schlüsse auch für den Fall, dass jede Definition eine *höchstens abzählbare* Menge von Dezimalbrüchen bestimmt.

Auch in diesem Fall kann ich der Richard'schen Argumentation nicht beitreten. Um die Quelle des Widerspruchs aufzudecken, weise ich vielmehr auf die *dritte* Möglichkeit hin, die für die Beziehung von Δ und G zu einander noch Platz greifen kann. Auch sie erörtere ich zunächst nur in allgemeiner Form; sie be-

trifft den Fall, dass sowohl $\varDelta$ als G materiell widerspruchs*frei* sind. Ist nämlich eine Menge $\varDelta$ tatsächlich abzählbar, so kann ein Endwiderspruch bei dem RICHARD'schen Verfahren auch so entstehen, dass die Vorschrift G zwar materiell widerspruchsfrei ist, aber *nicht mehr unter den Begriff fällt*, für den die Abzählbarkeit bewiesen ist, so dass das ihr zugehörige Element *der Menge $\varDelta$ gar nicht angehört*. Eine weitere allgemeine Möglichkeit ist für die Beziehung von $\varDelta$ zu G nicht vorhanden. So und nicht anders muss daher der Endwiderspruch in dem Fall verursacht sein, dass man den Begriff der endlichen Definirbarkeit seines umfassendsten Inhalts zu entkleiden und auf solche Definitionen zu beschränken vermag, die eine endliche oder abzählbare Menge von Dezimalbrüchen festlegen, und daher zu abzählbaren Gesamtmengen führen. Der *so* gefasste Begriff der endlichen Definirbarkeit enthält dann einen gewissen *engeren* Inhalt — auf dessen Erörterung ich hier nicht eingehe — und diese Inhaltsbeschränkung muss bewirken, dass die RICHARD'sche Vorschrift G nicht mehr unter diejenige *engere* Definition fällt, für die die Abzählbarkeit nachweisbar ist. Es muss also ein ähnlicher Gegensatz vorliegen, wie zwischen den Dezimalbrüchen mit einer endlichen Zahl von Null verschiedener Stellen und den übrigen, für die, analog wie bei der Vorschrift G, eine unendliche Menge von Stellen festzulegen ist, und deren Gesamtheit daher nicht abzählbar ist. Hierin ist die Auflösung der vermeintlichen Antinomie in dem RICHARD'schen Fall zu erblicken.

Zusammenfassend kann ich mich also folgendermassen aussprechen. Aus einem richtigen Urteil von der Form: »Dem Begriff $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ zu« kann mittels des Satzes: »Das Object A fällt unter den Begriff $\mathfrak{A}$« durch sonst richtige Schlüsse nur so ein Widerspruch abgeleitet werden, dass das Object A entweder widerspruchsvoll definirt ist oder aber zwar widerspruchsfrei, aber nicht unter den Begriff $\mathfrak{A}$ fällt.

10. Herr RICHARD sieht die Auflösung der Antinomie darin, dass sich die Definition G auf die *gesamte Menge $\varDelta$* seiner Dezimalbrüche bezieht; er nimmt nämlich an, dass *jede* Definition dieser Art in seiner Tabelle zu streichen ist, da sie an der Stelle, an der sie auftritt, keinen Sinn habe. Aber im Gegensatz zu ihm muss ich diese *allgemeine* Notwendigkeit verneinen. Allerdings befinde ich mich damit auch im Gegensatz zu POINCARÉ, der in diesem RICHARD'schen Argument die Erklärung der mengentheoretischen Antinomie erblickt. Wenigstens bedarf der Sinn der RICHARD'schen Worte einer näheren Präcisirung, die ich selbst nicht aus ihnen herauszulesen vermag. Ich werde daher an einem Beispiel beweisen, dass eine Definition, die an endlicher Stelle erscheint, und sich auf die Menge $\varDelta$ selbst bezieht, trotzdem nicht widerspruchsvoll zu sein braucht. Sie wird es erst, wenn sie sich auf *jedes einzelne Element* der Menge bezieht. Beides ist nicht identisch.

Dazu betrachte ich eine spezielle Menge

$$\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots\}$$

von Definitionen von folgender Art. Die Definitionen $G_1, G_2, \ldots G_{\nu-1}, G_{\nu+1}, \ldots$ sind widerspruchslose Definitionen, von denen sich keine auf die gesamte Menge $\mathfrak{G}$ bezieht, nur G_ν soll sich auf die Menge $\mathfrak{G}$ beziehen; der Einfachheit halber nehme ich nur eine *einzige* Definition dieser Art in $\mathfrak{G}$ an. Dann braucht G_ν nicht widerspruchsvoll zu sein.

Ehe ich dies beweise, weise ich darauf hin, wie überhaupt eine Definition beschaffen ist, die einen unendlichen Dezimalbruch bestimmen soll. Sie kann erstens von der Art sein, wie die unter 4) genannte, so dass sie die ν:te Ziffer für *jedes* ν unmittelbar bestimmt; sie kann zweitens von der Art sein, dass es möglich sein muss, jede beliebig herausgegriffene ν:te Ziffer, durch ein endliches Verfahren festzulegen. So ist es auch bei RICHARD. Mehr verlangen, heisst nicht nur die Mengenlehre überhaupt beseitigen, sondern noch vieles andere ausserdem.[1]

Ich nehme nun an, ν sei eine *ungerade* Zahl und gebe der Definition G_ν folgenden Inhalt. Sie soll einen Dezimalbruch δ' so bestimmen, dass seine μ:te Stelle mit der μ:ten Stelle des Dezimalbruchs $\delta_{2\mu}$ übereinstimmt, der durch die Definition $G_{2\mu}$ bestimmt wird. Diese Definition bezieht sich auf die Menge $\mathfrak{G}$ selbst, und ist doch widerspruchsfrei. Sie ist es, weil sie auf G_ν, d. h. *auf sich selbst keinen Bezug* nimmt. Nur eine Definition, die auf *jedes* Element der Menge, also *auf sich selbst Bezug* nimmt, wird *immer* widerspruchsvoll sein.

11. Endlich noch eine Schlussbemerkung. Der RICHARD'sche Brief beginnt mit den Worten, dass man in der Mengenlehre zu Antinomieen kommen kann, ohne an die wohlgeordneten Mengen anzuknüpfen. Dies ist gewiss richtig; *es ist aber keine Besonderheit der Mengenlehre.* Der RICHARD'sche Weg ist überall gangbar. Überall wird man im Stande sein, in der Weise, wie es am Schluss von Nr. 9 ausgeführt ist, aus einer richtigen Voraussetzung ihr kontradiktorisches Gegenteil abzuleiten. Will man der RICHARD'schen Argumentation eine gewisse Sonderstellung zugestehen, so wäre es höchstens so zu begründen, dass sie im Gewande eines klassischen mengentheoretischen Verfahrens auftritt und deshalb zunächst als widerspruchsfrei erscheinen konnte.

[1] Die Forderung, sich auf das Endliche zu beschränken, hat bisher kein Mathematiker praktisch erfüllt; er hat sie höchstens theoretisch gestellt.

Nachschrift.

Die vorstehende Note wurde im April 1907 niedergeschrieben, unter dem unmittelbaren Eindruck des Richard'schen Artikels, den ich damals erst kennen lernte. Sie sollte eine Kritik des Artikels geben, *ohne* auf den zu Grunde gelegten Begriff der endlichen Definirbarkeit materiell einzugehen.

Bei der Korrectur meiner Note empfinde ich jedoch die Notwendigkeit, dies nachzuholen; in der That lässt sich die kritische Analyse des Beweisganges sonst in befriedigender Form nicht vollständig durchführen. Dem habe ich in der neu eingefügten Nr. 9. Rechnung getragen. Das übrige habe ich *sachlich* nicht geändert.[1]

[1] Der Inhalt meiner Note war in sehr knapper Form bereits im Zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichts (Leipzig 1908, p. 29) enthalten. Er hat inzwischen eine kritische Bemerkung von G. Hessenberg veranlasst (Jahresb. d. D. M. V. Bd. 17, p. 145 ff.); leider ehe die obige ausführliche Darstellung erschienen ist.

SUR LES ENSEMBLES FINIS ET LE PRINCIPE DE L'INDUCTION COMPLÈTE.

PAR

E. ZERMELO

à GÖTTINGEN.

1. Introduction.

Le principe de l'induction complète est-il démontrable ou non? Voilà une question qui dans ces dernières années a préoccupé beaucoup d'esprits. Dans plusieurs articles de la *Revue de Métaphysique et de Morale*[1] M. POINCARÉ a défendu la thèse que ce principe est un *jugement synthétique a priori;* d'autres auteurs comme MM. COUTURAT, RUSSELL et WHITEHEAD ont soutenu le contraire et présenté des démonstrations du principe en question.

Le principe de l'induction permet de démontrer des théorèmes sur les nombres finis en raisonnant de n à $n + 1$. La question dépend par suite de la façon dont on définit le nombre fini. Or pour moi tout théorème que l'on énonce pour des nombres finis n'est rien d'autre qu'un théorème sur les *ensembles finis;* il faut donc avant tout définir ce qu'on entend par là.

On a proposé plusieurs définitions des ensembles finis. On peut par exemple avec DEDEKIND[2] prendre pour base la transformation d'un ensemble en lui-même; on peut aussi en se servant des idées de CANTOR[3] partir de la notion des ensembles bien-ordonnés. Il faudrait montrer que toutes ces définitions peuvent être ramenées l'une à l'autre; c'est ce que je me suis proposé de faire dans cet article. A cet effet je me suis appuyé sur les notions fondamentales

[1] 13e Année N:o 6, 14e Année N:o 1, N:o 3.

[2] Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888.

[3] Mathematische Annalen vol. 49 p. 207.

de DEDEKIND et de CANTOR tout en les énonçant encore une fois pour la commodité du lecteur. Je serais heureux si ces considérations pouvaient contribuer à bien mettre en évidence l'utilité qu'ont, pour l'étude des fondements des »vraies mathématiques», les notions et les méthodes de la théorie des ensembles.

J'ai pu éviter dans les démonstrations l'emploi de l'axiome de DEDEKIND[1] qui présuppose l'existence d'ensembles infinis; mais j'ai cru au contraire pouvoir recourir au principe du »choix arbitraire»[2] pour la démonstration du théorème IV.

2. Définitions fondamentales.

Nous appellerons »*chaîne simple*»[3] un ensemble M qui jouit de la propriété suivante: Il existe une correspondance univoque et réciproque entre, d'une part, les éléments de M, sauf peut-être l'un d'entre eux que nous nommerons le dernier et, d'autre part, les éléments d'une partie de M, soit M', qui ne contient pas l'un des éléments de M (le premier); cette correspondance ne permettant pas la division de M en parties séparées. Deux parties de M sont dites »séparées» par rapport à une certaine correspondance lorsqu'aucun élément de l'une n'a son image dans l'autre et réciproquement.

Un ensemble est appelé »*fini*», si tous ses éléments font partie d'une chaîne simple contenant un dernier élément. Si au contraire une chaîne simple n'a pas de dernier élément, l'ensemble qui contient tous ses éléments est nommé »*dénombrable*».

La définition proposée pour les ensembles finis exprime d'une façon précise ce que M. POINCARÉ entend, en définissant les nombres finis »par récurrence» ou »par des additions successives». En effet, les éléments d'un ensemble sont définis »*successivement*» lorsque chaque élément (sauf le premier) est déterminé par le précédent. Il faut donc qu'il y ait une correspondance telle qu'à chaque élément — à l'exception du premier ou du dernier — corresponde un autre élément de l'ensemble. Mais cela ne suffit pas; la correspondance supposée ne servirait à rien, s'il n'y avait pas *enchaînement* entre les diverses parties de la série, ou en termes plus précis, s'il existait ce que nous avons appelé des »parties séparées».

---

[1] DEDEKIND, l. c. 66.

[2] ZERMELO, Math. Ann. vol. 59 p. 514.

[3] La notion de »chaîne» est due à DEDEKIND (l. c. 37), mais sa définition des ensembles finis diffère beaucoup de la mienne. Voir cet article N:o 6.

3. L'induction complète appliquée aux membres d'une chaîne simple.

Théorème I. Si M est une chaîne simple, tout sous-ensemble de M contenant le premier élément e ainsi que les images de tous ses éléments est identique à M lui-même.

Il en résulterait que toute propriété du premier élément qui, si elle est vraie pour un élément quelconque est vraie aussi pour son image, s'étend à tous les éléments de l'ensemble.

Démonstration. Soit M_0 la partie commune de tous les sous-ensembles M_1 de M qui contiennent e et les images de chacun de leurs éléments, et soit $R = M - M_0$ l'ensemble complémentaire. Alors tous les éléments de M_0 ont leurs images en M_0 puisque ces dernières sont communes à tous les ensembles M_1. La réciproque est également vraie: à l'exception de e tout élément de M_0 est image d'un autre, car autrement on pourrait supprimer en M_0 un élément différent de e et ne jouissant pas de cette propriété; l'ensemble restant serait encore un M_1, ce qui est contraire à la définition de M_0. Il en résulte qu'aucun élément de M_0 ne peut être l'image d'un élément de R et réciproquement; les parties M_0 et R seraient donc séparées à moins que M_0 ne soit identique à M.

C'est la définition de l'ensemble M_0 (»la chaîne de l'élément e» d'après DEDEKIND l. c. 44) que M. POINCARÉ[1] a rejetée comme »non-prédicative» dans ma démonstration du théorème de BERNSTEIN. Mais MM. RUSSELL[2] et PEANO[3] ont déjà fait à l'argumentation de M. POINCARÉ certaines critiques qui me paraissent justifiées. (Voir le dernier alinéa du N:o 6.)

4. Les ensembles doublement bien-ordonnés.

Rappelons qu'un ensemble est dit »ordonné» lorsqu'une prescription permet de distinguer lequel de deux éléments quelconques a et b précède et lequel suit l'autre. Un ensemble est dit »bien-ordonné» lorsqu'en plus chacun de ses sous-ensembles possède un »premier élément» et un seul c'est-à-dire un élément qui précède tous les autres.

[1] Revue de Métaphysique et de Morale 14e Année p. 315.
[2] Rev. d. Met. e. d. Mor. 14e Année p. 632.
[3] Revista de Matematica VIII N:o 5 p. 152.

Définition. Nous dirons qu'un ensemble est »*doublement bien-ordonné*» lorsqu'il est bien-ordonné et lorsque chacun de ses sous-ensembles possède non seulement un premier mais aussi un »dernier» élément c'est-à-dire un élément qui suit tous les autres.

Théorème II. Tout ensemble fini M peut être doublement bien-ordonné et, réciproquement, tout ensemble doublement bien-ordonné est fini.

Démonstration. Supposons que l'ensemble fini M soit une chaîne simple dont le premier élément soit désigné par e et le dernier par u. Nous allons montrer que tout élément a de M définit un ensemble $E(a)$ doublement bien-ordonné commençant par e, finissant par a et tel que chaque élément x' de $E(a)$ qui diffère de e soit l'image de l'élément x immédiatement précédant. En effet le théorème est évident pour $a = e$ et, s'il est vrai pour l'élément quelconque a, il est également vrai, comme nous allons le voir, pour son image a'. A cet effet considérons l'ensemble $E(a)$ qui, par hypothèse, finit par a et ajoutons-y a' comme dernier élément; nous obtenons de cette façon l'ensemble $E(a')$ exigé, doublement bien-ordonné et finissant par a'. On voit donc, en s'appuyant sur le théorème I, qu'on peut considérer finalement l'ensemble $E(u)$. Cet ensemble $E(u)$ contient tous les éléments de M; car il contient e, et, s'il contient un x différent du dernier élément u, l'élément immédiatement suivant ne peut pas différer de l'image x' de x. En d'autres termes l'ensemble M est doublement bien-ordonné.

Soit d'autre part un ensemble M doublement bien-ordonné, commençant par e et finissant par u. Alors on peut faire correspondre à chaque élément x, à la seule exception près de u, l'élément immédiatement suivant x' et l'on obtient de cette façon, comme nous allons le voir, une chaîne simple. En effet, si ce procédé conduisait à des parties »séparées», une d'entre elles au moins ne contiendrait pas u et posséderait par hypothèse un dernier élément v, tandis que l'élément immédiatement suivant v' figurerait dans la partie complémentaire.

5. L'induction appliquée aux ensembles finis.

Théorème III. Soit une proposition démontrée d'une part pour tout ensemble contenant un seul élément et, d'autre part, pour un ensemble fini quelconque chaque fois qu'elle est vraie pour cet ensemble diminué d'un de ses éléments; alors la proposition est vraie pour tous les ensembles finis. Voilà ce que l'on appelle le raisonnement de n à $n + 1$.

Démonstration. Étant donné un ensemble M, fini et doublement bien-ordonné, la proposition est tout d'abord vraie, par hypothèse, pour le segment $E(e)$ de M

qui ne contient que le premier élément e. Si d'autre part elle est vraie pour un segment $E(a)$ dont le dernier élément est a, et qui contient tous les éléments précédents, elle sera également vraie pour le segment $E(a')$ qu'on obtient en ajoutant à $E(a)$, comme dernier élément, l'élément a' suivant immédiatement a. En vertu du théorème I la proposition sera exacte pour tous les segments $E(a)$ qui finissent par un élément quelconque de M, et en particulier pour $E(u) = M$ lui-même; c'est-à-dire pour un ensemble fini quelconque.

6. Caractère fondamental des ensembles finis.

Définition. Deux ensembles M, N sont appelés »*équivalents*», si l'on peut établir une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de l'un et ceux de l'autre.

Théorème IV. Un ensemble fini n'est équivalent à aucune des ses parties; et réciproquement tout ensemble jouissant de cette propriété est fini.[1]

Démonstration. Pour démontrer la première partie du théorème nous faisons d'abord voir que la proposition est vraie pour un ensemble fini M chaque fois qu'elle l'est pour l'ensemble M_1 que l'on obtient en supprimant dans M un élément a. Supposons en effet qu'on ait établi une correspondance univoque et réciproque entre M et M', partie effective de M; désignons par a' l'image de a et par M'_1 l'ensemble des images des éléments de M_1.

Au cas où M' ne contient pas a, l'élément a' diffère de a, et M'_1 qui ne contient ni a ni a' est une partie effective de M_1.

Si au contraire a fait partie de M' l'ensemble M_1 contient un élément p différent de a qui ne fait pas partie de M', et il y a encore deux cas à considérer.

1°. a' est identique à a, et M'_1 qui ne contient ni a ni p est une partie proprement dite de M_1.

2°. a' diffère de a et de p, et a est contenu dans M'_1. Remplaçons dans M'_1 a par a'; nous obtenons de cette façon un ensemble M''_1 qui ne contient ni a ni p et qui est par conséquent une partie effective de M_1. Soit b l'élément de M_1 dont a est l'image; au moyen de notre substitution c'est à présent a' qui en est l'image, et nous avons obtenu une correspondance univoque et réciproque entre M_1 et M''_1.

Donc dans tous les cas, si M est équivalent à une de ses parties, M_1 le sera également. Mais l'impossibilité étant évidente pour un ensemble ne possé-

[1] C'est là la distinction de Dedekind (l. c. 64) entre les ensembles finis et infinis.

dant qu'un seul élément, en vertu du théorème III elle s'étend à tous les ensembles finis.[1]

Soit d'autre part M un ensemble quelconque qui ne soit équivalent à aucune de ses parties. Nous pouvons admettre que cet ensemble est bien-ordonné en nous appuyant sur un théorème dont j'ai donné la démonstration.[2] Alors tout sous-ensemble M_1 de M doit contenir non seulement un premier mais aussi un dernier élément. Car autrement on pourrait établir une correspondance entre M_1 et une de ses parties en définissant comme image de chaque élément x de M_1 l'élément suivant x', c'est-à-dire le premier de tous les éléments de M_1 qui suivent x. L'ensemble M est donc doublement bien-ordonné, c'est-à-dire, fini.

La démonstration en question du théorème »que tout ensemble peut être bien-ordonné» est fondée sur *»l'axiome du choix arbitraire»* que l'on peut facilement ramener au suivant: Quand un ensemble S est divisé en parties $A, B, C, \ldots$, dont aucune n'est nulle, il existe toujours un sous-ensemble S_1 de S au moins qui contient un et un seul élément $a, b, c, \ldots$ de chacune des parties $A, B, C, \ldots$ C'est un axiome assez évident dont on s'est servi jusqu'à ces derniers temps presque sans opposition et qui n'a jamais conduit à un faux résultat. Tout récemment cependant MM. Borel[3] et Peano[4] l'ont rejeté dans tous les cas où l'ensemble S possède une infinité de parties. Sans doute, le principe en question est *indémontrable*, mais il est *indispensable* à certaines théories mathématiques. Il me semble, par exemple, impossible de démontrer le théorème précédent sans avoir recours à cet axiome explicitement ou implicitement![5] Et M. Poincaré est tout à fait du même avis quand il dit:[6] »L'axiome est «self-évident» pour les classes finies; mais s'il est indémontrable pour les classes infinies, il l'est sans doute aussi pour les classes finies qu'on n'en a pas encore distinguées à ce stade de la théorie; c'est donc un jugement synthétique a priori sans lequel la «théorie cardinale» serait impossible, aussi bien pour les nombres finis que pour les nombres infinis.»

Dans le même article, M. Poincaré a fait à ma démonstration une autre objection, analogue à celle dont nous avons parlé à l'art. 3, savoir qu'une de mes définitions serait »non-prédicative». J'ai discuté à fond cette critique dans

[1] Cette démonstration est due à Cantor (Math. Ann. vol. 46, p. 490, D.).

[2] Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. vol. 59.

[3] Math. Ann. vol. 60 p. 194.

[4] Revista de Matematica VIII N:o 5 § 1.

[5] Dedekind dans sa démonstration du théorème équivalent (l. c. § 14) s'en sert de même en considérant (159) une série de représentations simultanées α_n.

[6] Revue d. Mét. e. d. Mor. 14e Année N:o 3 p. 313.

une note récemment parue.[1] Dans ce travail j'ai de plus réfuté les objections de MM. Schoenfliess et Bernstein qui n'admettent pas l'addition d'un seul élément à un ensemble bien-ordonné.

7. Le type ordinal des nombres cardinaux finis.

Théorème V. Un ensemble T dont tous les éléments sont des ensembles finis contient toujours comme élément au moins un ensemble E «de plus petite puissance», c'est-à-dire tel que chaque élément X de T possède un sous-ensemble équivalent à E. Et d'autre part: étant donné un ensemble fini Z, un ensemble T dont chaque élément X est un ensemble fini et équivalent à un sous-ensemble de Z contient toujours comme élément au moins un ensemble U «de plus grande puissance», c'est-à-dire tel que chaque élément de T soit équivalent à un sous-ensemble de U.

En se servant de la notion des «nombres cardinaux finis» on peut énoncer le théorème comme suit: tout ensemble de nombres cardinaux finis ordonné suivant leur grandeur est bien-ordonné et chaque segment de l'ensemble non identique à l'ensemble total est doublement bien-ordonné. L'ensemble de tous les nombres cardinaux finis est donc «dénombrable».

Démonstration. Considérons un élément A quelconque de T que nous supposerons doublement bien-ordonné et faisons usage du théorème que de deux ensembles bien-ordonnés l'un au moins est «semblable» à un segment de l'autre.[2] J'appelle »segment» d'un ensemble bien-ordonné un sous-ensemble qui, lorsqu'il contient un élément a quelconque, contient en même temps tous les éléments de l'ensemble qui précèdent a. Remarquons que deux ensembles »semblables» sont aussi équivalents. Au cas où il n'y a pas de segment de A équivalent à un autre élément de T l'élément A sera l'ensemble E de plus petite puissance demandé, puisque chaque élément de T possède un segment semblable à A. Dans le cas contraire considérons tous les segments de A équivalents à un ou à plusieurs éléments de T. Les derniers éléments de ces segments forment à leur tour un ensemble fini dont le premier élément correspond à un segment E' équivalent à un élément E de T. Cet ensemble E sera celui de plus petite puissance. En effet soit X un élément quelconque de T. Si X est équivalent à un segment

[1] Zermelo. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. Math. Ann. vol. 65, p. 107—128.

[2] G. Cantor, Math. Ann. 49 p. 215 N.

X' de A, l'ensemble E' qui est un segment de X' sera équivalent à un sous-ensemble de X. Dans le cas contraire A sera équivalent à un sous-ensemble de X, et l'ensemble E' qui n'est qu'un sous-ensemble de A le sera également. Donc dans tous les cas E qui est équivalent à E' est équivalent à un sous-ensemble de X.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, supposons que l'ensemble Z soit doublement bien-ordonné, et que chaque élément X de T soit équivalent à un segment X' de Z. Les derniers éléments de tous ces segments X' forment un sous-ensemble Z_0 de Z dont le dernier élément est u'. Soit de plus U' le segment de Z finissant par u' et U un élément de T équivalent à U'. Alors chaque élément X de T est équivalent à un segment X' de U' et par conséquent équivalent aussi à un sous-ensemble de U. Donc U est un ensemble de plus grande puissance parmi tous les éléments de T.

8. Conclusion.

Les théorèmes I, III et V expriment le principe de l'induction complète sous les diverses formes qu'on peut lui donner; le principe est ainsi réduit à la définition des ensembles finis que nous avons donnée ou à une des définitions équivalentes. Mais en résulte-t-il que le principe en question soit un jugement analytique? Cela dépend de la nature des axiomes sur lesquels repose la théorie des ensembles et que nous avons été contraints d'utiliser dans chacune de nos démonstrations. Si ces axiomes, que je me propose d'énoncer complètement dans un autre article, ne sont que des principes purement logiques, le principe de l'induction le sera également; si au contraire ils sont des intuitions d'une sorte spéciale, on peut continuer à regarder le principe d'induction comme un effet de l'intuition ou comme un «jugement synthétique a priori». Quant à moi, je n'oserais pour le moment, décider de cette question purement philosophique.

Pour démontrer les théorèmes annoncés, nous ne nous sommes pas appuyés sur l'hypothèse qu'il existe des ensembles infinis, c'est-à-dire des ensembles équivalents à une de leurs parties, hypothèse fondamentale de Dedekind. La théorie des ensembles en est certainement indépendante puisqu'elle énonce et démontre les théorèmes valables pour des ensembles *quelconques*. Si donc l'arithmétique élémentaire, c'est-à-dire la théorie des ensembles finis, que l'on peut fonder sur le principe de l'induction complète n'a pas besoin de «l'infini actuel», l'analyse au contraire et la théorie des fonctions qui ont pour base les notions de nombre irrationel et de limite exigent absolument la considération d'ensem-

bles infinis. En effet, quelque définition que l'on donne du nombre irrationnel, il sera toujours défini par une *infinité* de nombres rationnels; car autrement le continu serait dénombrable. De même la notion de «limite» ne peut être obtenue qu'en considérant une infinité de valeurs possibles. C'est précisément cette idée des ensembles infinis due à M. CANTOR qui est le fondement de cette partie des «vraies mathématiques».

En terminant je tiens à remercier mes amis MM. CARATHÉODORY et JACCOTTET qui ont bien voulu m'aider à la rédaction française de ce mémoire.

Montreux, mai 1907.

Supplément.

M. POINCARÉ a fait suivre ma note de quelques «Réflexions» qui montrent que l'illustre géomètre est maintenant tout à fait de mon avis en ce qui concerne les «définitions prédicatives». Le petit détour qu'il emploie (p. 199), en modifiant la démonstration célèbre de CAUCHY-WEIERSTRASS, pour prouver qu'une équation algébrique a toujours une racine n'est peut-être pas absolument nécessaire. Mais dans la remarque «Plus généralement etc.» sur la limite inférieure d'un ensemble quelconque de nombres réels M. POINCARÉ rend nettement ma propre pensée et justifie ma démonstration du «Théorème I» (p. 187). Il suffit, en effet, de substituer à «l'ensemble E de nombres réels», «l'ensemble E des ensembles M_1» et à «limite inférieure e» «partie commune M_0»; on obtiendra alors:

«Si nous envisageons un ensemble E d'ensembles M_1 on peut démontrer que cet ensemble possède une partie commune M_0; cette partie commune est définie *après* l'ensemble E; et il n'y a pas de pétition de principe puisque M_0 ne fait pas en général partie de E. Dans certains cas particuliers, il peut arriver que M_0 fasse partie de E. Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque M_0 ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition*, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de M_0.»

Et c'est en invoquant l'autorité de M. POINCARÉ lui-même que l'on peut mettre en évidence la légitimité de ma démonstration.

RÉFLEXIONS SUR LES DEUX NOTES PRÉCÉDENTES

PAR

H. POINCARÉ.

à Paris.

Les considérations présentées par M. Schönflies au sujet de la note de M. Richard seront lues avec intérêt; non qu'aucune de ses critiques puisse résister à un examen approfondi, mais par ce qu'elles peuvent suggérer d'utiles réflexions.

1. On sait que M. Richard considère l'ensemble E des nombres *qui peuvent être définis en un nombre fini de mots.* Il démontre que cet ensemble est dénombrable et c'est cette démonstration que M. Schönflies conteste.

Et pourquoi? Parce qu'on peut, dit-il, définir par une même formule une infinité d'objets mathématiques. Il est évident qu'une pareille formule ne peut constituer une définition, au moins au sens où M. Richard emploie ce mot. Et en effet ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets; si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres; elle n'en définit aucun; elle n'est plus une définition.

Ainsi pour prendre le premier exemple de M. Schönflies; quand on dit »une fonction constante», on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas, qui définit seulement leur relation avec un certain nombre, à savoir la valeur constante de la fonction. Pour achever de définir une de ces fonctions, il faut définir cette valeur constante.

C'est seulement si cette valeur constante peut être définie en un nombre fini de mots, que la fonction elle-même pourra l'être. Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de

fonctions qui a la puissance du continu, c'est à dire la puissance de toutes les constantes possibles; cette formule permet de définir en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions qui a même puissance que l'ensemble des constantes définissables en un nombre fini de mots, et ce dernier, d'après la démonstration de M. RICHARD est dénombrable.

La 1ère critique de M. SCHÖNFLIES ne tient donc pas debout; et ce que je viens de dire s'applique sans changement à tous ses autres exemples. Dans tous les cas qu'il cite, il définit un objet A comme ayant une relation B avec un autre objet C. Cette relation B ne suffit pas pour définir A; il faut définir également l'objet C; pour que A se trouve défini en un nombre fini de mots, il faut que non seulement B, mais encore C soient définis en un nombre fini de mots. Les autres critiques qui s'appuient sur la 1ère, tombent évidemment du même coup.

2. Il n'en est pas moins vrai qu'on peut faire les réflexions suivantes. Il n'y a pas d'infini actuel; ce que nous appelons l'infini, c'est uniquement la possibilité de créer sans cesse de nouveaux objets, quelque nombreux que soient les objets déjà créés. Seulement ces nouveaux objets ne sont concevables eux-mêmes que s'ils sont susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots. Il en résulte qu'un ensemble, dont chaque élement ne peut pas être défini en un nombre fini de mots, est un pur néant; on n'en peut rien dire, ni rien penser.

C'est bien ainsi que pense M. RICHARD; et je signalerai en passant une très intéressante démonstration de l'axiome de ZERMELO que ce savant vient de publier dans l'Enseignement Mathématique et où il s'exprime à ce sujet de la façon la plus nette.

Mais alors il n'y a pas d'autre ensemble que ceux dont tous les éléments sont définissables en un nombre fini de mots; et comme on peut leur appliquer la démonstration de M. RICHARD, il semble qu'on doive conclure que *tous* les ensembles sont dénombrables. Que signifie alors la distinction des puissances, et en quoi le continu diffère-t-il de l'ensemble des nombres entiers?

On peut démontrer cependant qu'il y a une différence et c'est en cela, au fond, que consiste l'antinomie RICHARD.

Il est impossible de trouver une formule définissant en un nombre fini de mots une relation entre un nombre réel et un nombre entier et qui soit telle que tout nombre réel définissable en un nombre fini de mots corresponde à un nombre entier en vertu de cette formule. Quelle que soit cette formule, on pourra toujours définir en un nombre fini de mots un nombre réel que cette formule ne fait correspondre à aucun nombre entier. Voilà ce que CANTOR démontre et voilà ce qu'on entend quand on dit que la puissance du continu n'est pas celle de l'ensemble des entiers.

Comment cela s'accorde-t-il avec la démonstration de M. Richard qui nous enseigne que tout ensemble dont les éléments sont définissables en un nombre fini de mots est dénombrable? Considérons une formule F définissant une relation entre les divers entiers et divers nombres réels (qui se trouveront par là définis en un nombre fini de mots) l'ensemble E de ces nombres réels sera dénombrable. Nous pourrons ensuite définir d'autres nombres réels ne faisant pas partie de E; ces définitions ne contiendront qu'un nombre fini de mots mais parmi ces mots figurera le nom de l'ensemble E. Soit E' l'ensemble de ces nouveaux nombres réels. La démonstration de Cantor nous apprend que l'ensemble E' n'est pas nul et celle de Richard nous apprend que l'ensemble $E + E'$ est dénombrable. On pourra donc trouver une formule F' définissant une relation entre les divers entiers et les divers nombres de l'ensemble $E + E'$.

Mais alors on pourra de nouveau trouver d'autres nombres ne faisant pas partie de $E + E'$ et dont l'on pourra donner une définition ne contenant qu'un nombre fini de mots parmi lesquels les noms des ensembles E et E'. Ici encore l'ensemble E'' de ces nombres ne sera pas nul et il sera dénombrable. Et ainsi de suite.

3. Et alors dira-t-on; tous ces nombres, ceux de E, de E', de E'', ceux des ensembles suivants, sont tous définissables en un nombre fini de mots, de sorte qu'en vertu de la démonstration de Richard, il devrait exister une formule d'un nombre fini de mots qui permette de les dénombrer. C'est là l'antinomie dont M. Richard donne l'explication; on doit après avoir formé le tableau de tous les assemblages possibles de syllabes, rejeter ceux qui n'ont aucun sens ou qui ne définissent pas un nombre. Tant que l'ensemble E n'est pas défini, ceux de ces assemblages où figure le nom de cet ensemble sont dénués de sens et doivent être rejetés. Quand on a défini l'ensemble E, ils prennent un sens et il faut les reprendre. La démonstration de M. Richard suppose au contraire que l'on fait ce triage d'un seul coup et sans s'y reprendre à plusieurs fois.

Je ne puis résister à la tentation de rappeler ici un exemple curieux cité par M. Russell et où l'on retrouve la même contradiction apparente, expliquée de la même manière, mais où l'on n'a pas à envisager l'infini, ce qui permet peut-être de mieux se rendre compte des faits. Quel est le plus petit nombre qui n'est pas susceptible d'être défini par une phrase formée de moins de cent mots français? Ce nombre existe-t-il?

Oui, car par une phrase formée de moins de cent mots français, on peut définir au plus n^{100} nombres, n étant le nombre des mots du dictionnaire français. On ne peut donc définir tous les nombres, et parmi ceux qui ne peuvent

l'être il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres et qui est par là entièrement défini.

Non, car ce nombre s'il existait impliquerait contradiction; car il serait défini par une phrase de moins de cent mots, à savoir par la phrase même qui annonce qu'il ne peut pas l'être.

C'est que cette phrase tantôt a un sens, tantôt n'en a aucun, selon que tous les autres nombres ont été ou n'ont pas été préalablement définis.

4. J'arrive à la dernière objection de M. Schönflies (§ 9). M. Richard a tort de dire d'après lui que *toute* définition introduisant la notion de l'ensemble total Δ doit être rayée de son tableau. Et M. Schönflies cherche à le prouver par un exemple. Il considère une série de définitions G_1, $G_2, \ldots$ et l'ensemble G de ces définitions. Aucune de ces définitions, excepté la définition G_ν (*où* ν *est un nombre impair*) n'introduit la notion de l'ensemble G. Quant à G_ν, elle définit une fraction décimale δ_ν en nous apprenant que la μ^e décimale de δ_ν dépend d'après une certaine loi de la μ^e décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par la définition $G_{2\mu}$. Donc dans la définition G_ν figure la notion du $2\mu^e$ élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G, et par conséquent la notion de l'ensemble G. M. Richard la rayerait donc de son tableau, et cependant elle est exempte de contradiction et de cercle vicieux.

Cette objection est sans valeur. Et en effet nous pouvons définir l'ensemble G' formé par les éléments d'ordre pair G_2, $G_4, \ldots$

Soit alors δ_ν la fraction décimale dont la μ^e décimale dépend d'après une certaine loi de la μ^e décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par la μ^e élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G'.

Cette phrase que je puis appeler G'_ν a même sens que la phrase G_ν, mais elle n'introduit plus la notion de l'ensemble G, mais seulement celle de l'ensemble G'. Ces deux phrases figureront dans le tableau de M. Richard; mais G_ν devra être effacée comme contenant la notion de G, tandis que G'_ν qui est indépendante de cette notion devra être conservée. La fraction δ_ν qui est définie aussi bien par G'_ν que par G_ν restera donc dans notre tableau des fractions δ_μ. Il n'y a donc là aucune difficulté.

5. Je vous envoie en même temps une note de M. Zermelo. Cette note n'a pu me convaincre et M. Zermelo ne s'en étonnera pas; puisqu'il signale lui-même que la définition de l'ensemble qu'il appelle M_0 est de celles que je ne regarde pas comme légitimes. Je sais que M. Zermelo doit exposer ses idées sur ce point dans un mémoire plus étendu, mais ce mémoire n'ayant pas encore été publié, il convient d'en attendre la publication pour apprécier ses raisons.

Je ne puis me faire pour le moment une idée de ces raisons que par les quelques lignes qui sont à la fin du § 3; et je vais tâcher de rétablir l'objection de M. ZERMELO, sans, je l'espère, m'écarter de sa pensée.

Je veux démontrer qu'une équation algébrique $F = 0$ a toujours une racine; pour cela je remarque que $|F|$ est toujours positif et a par conséquent une limite inférieure ou minimum, qu'une fonction continue atteint toujours son minimum, et je démontre enfin que $|F|$ ne peut avoir d'autre minimum que 0; j'en conclus qu'il y a un point pour lequel $|F| = 0$.

Dans cette démonstration on parle 1° de l'ensemble E des valeurs de $|F|$, 2° de l'une de ces valeurs e qui est la plus petite de toutes celles de E; et 3° de la valeur correspondante de x. La définition de e où figure l'ensemble E est *non-prédicative*, puisque la notion de E devrait être à la fois antérieure à celle de e dont la définition dépend de E et postérieure à celle de e qui est un élément de E. On ne pourrait donc rejeter l'emploi des définitions non-prédicatives sans rejeter une démonstration admise par tous les mathématiciens.

Cela serait grave; heureusement il est aisé de remettre la démonstration sur ses pieds sans y laisser subsister de pétition de principe. Soit x la variable indépendante; soit y une valeur de x dont les parties réelle et imaginaire soient des nombres rationnels; (je dirai pour abréger que y est une valeur rationnelle de x). Soit E' l'ensemble des valeurs que peut prendre $|F(y)|$. Soit e la limite inférieure, ou minimum des diverses valeurs de l'ensemble E'.

On démontre ensuite successivement qu'il y a une valeur de x non rationnelle en général et telle que $|F(x)| = e$, et que e ne peut être différent de zéro.

La pétition de principe a disparu puisque dans la définition de e figure seulement la notion de l'ensemble E' et que e ne fait pas en général partie de E'. Si l'on examine avec quelque attention les détails de la démonstration d'ailleurs bien connue, dont nous n'avons fait que rappeler les lignes générales, on reconnaîtra que c'en est bien là le véritable sens.

Plus généralement; si nous envisageons un ensemble E de nombres réels positifs, par exemple, on peut démontrer que cet ensemble possède une limite inférieure e; cette limite inférieure est définie *après* l'ensemble E; et il n'y a pas de pétition de principe puisque e ne fait pas en général partie de E. Dans certains cas particuliers, il peut arriver que e fasse partie de E. Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque e ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition*, mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de e.

La raison invoquée par M. ZERMELO ne saurait donc suffire pour justifier l'emploi des définitions »non-prédicatives», car l'assimilation qu'il fait est inexacte.

M. Zermelo invoque également l'autorité de MM. Peano et Russell; je ferai seulement remarquer que M. Peano se borne à une affirmation qu'il ne justifie pas, et que M. Russell admet au contraire que les définitions non-prédicatives ne sont pas légitimes en général (c'est même lui qui a employé le premier le mot de non-prédicatif), mais qu'elles peuvent l'être à certaines conditions dont je n'ai pu comprendre l'énoncé.

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION RELATIVE À L'ÉQUILIBRE DES PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES.[1]

PAR

GIUSEPPE LAURICELLA.

à Catania.

Dans ce travail je substitue, à l'équation différentielle en U relative à l'équilibre des plaques $\Delta^4 U = f(x, y)$, un système Γ de deux équations différentielles où les fonctions inconnues u, v sont les dérivées partielles du premier ordre de la fonction U; on doit alors intégrer le système Γ en supposant u et v données sur le contour.

Pour cela je développe d'abord pour le système Γ une théorie[2] généralisant, dans ses points essentiels, celle du *potentiel newtonien*, qui me permettra de suivre ici une voie analogue à celle de Fredholm pour le *problème de Dirichlet*, et que j'ai suivie autrefois pour le problème de l'équilibre des corps élastiques isotropes.[3]

Outre au problème de l'intégration du système Γ pour une aire finie (*problème intérieur*), je traite ici le même problème pour une aire infinie (*problème extérieur*); et dans tous les deux problèmes je suppose que les coordonnées des points du contour, considérées comme fonctions de l'arc, sont finies et continues ainsi que leurs dérivées des trois premiers ordres.

Le cas du rectangle, comme de tout contour ayant des pointes, échappe à l'analyse générale que je développe, de même qu'il échappe à l'analyse de Fred-

[1] Ce Mémoire est antérieur à ma Note: *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$ (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei; vol. XVI, 2:o sem., Settembre 1907); il a été envoyé à l'Académie des Sciences de Paris le Décembre du 1906.

[2] Ici, l'introduction de deux expressions, généralisant la dérivée normale et analogues aux tensions de la théorie de l'élasticité, nous guide à considérer un problème analogue au *problème dérivé de Dirichlet*. Dans ce travail je ne traite pas ce problème, qui pourra se resoudre en utilisant les resultats du Chapitre III.

[3] Lauricella; *Alcune applicazioni della teoria della equazioni funzionali alla fisica-matematica* Nuovo Cimento, Serie V, Vol. XIII, 1907).

HOLM pour le *problème de Dirichlet.* M. COIALOWITCH[1] a traité, il y a quelques années, directement ce cas, en faisant des importantes applications numériques. Néamoins je ne crois pas sans intérêt de donner ici pour le cas du rectangle une autre solution directe, qui est aussi susceptible d'applications numériques.

CHAPITRE I.

1. Soit C une courbe plane fermée dépourvue de tout point de rencontre avec soi-même et douée de tangente déterminée en chaque point — exception faite, au surplus, pour un nombre fini de points, où nous supposerons toutefois que la courbe C ait, des deux côtés de chacun d'eux, *deux* tangentes déterminées, au lieu qu'une seule.

Rapportons les points du plan de la courbe C à un système de deux axes cartésiens ortogonaux x, y; et désignons par σ l'aire plane finie, qui est renfermée par C, par σ' la portion infinie du plan, qui est limitée par C, et par r le rayon vecteur, qui joint deux points quelconques du plan, dont les coordonnées soient (x, y), (ξ, η).

Le sens positif de la normale n à la courbe C sera toujours celui qui est dirigé vers l'intérieur de l'aire σ; et le sens positif de la tangente celui qui peut se porter en coïncidence avec le sens positif de l'axe des x par un glissement du plan sur soi-même, qui entraîne la superposition des deux sens positifs de la normale n et de l'axe des y.

Ensuite nous désignons par s l'arc de la courbe C rapporté à une origine, que l'on pourra choisir arbitrairement sur C, et mesuré toujours dans la direction positive, déjà fixée, sur la tangente en chaque point de la courbe. De ces hypothèses on déduit, pour tout point (x, y) de C, les rélations connues:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}.$$

[1] *Sur une équation aux dérivées partielles du 4:e ordre* (en russe) (St. Pétersbourg. — Imprimerie de l'Académie impériale des sciences. — 1902).

Théorèmes de transformation.

2. Soit $U(x, y)$ intégrale des équations suivantes:

$$
(1)\quad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma\text{)} & \Delta^4 U = \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 U}{\partial y^4} = f(x, y), \\ \text{(sur la courbe } C\text{)} & U = a(s), \quad \dfrac{dU}{dn} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{dy}{dn} = b(s), \end{cases}
$$

où nous supposons que la fonction donnée $f(x, y)$, des points de σ, soit finie, continue et telle qu'on peut écrire la *formule de Poisson:*[1]

$$
(2)\qquad \Delta^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_\sigma f(\xi, \eta) \log r \, d\sigma \right) = f(x, y);
$$

et où nous supposons encore que la fonction $a(s)$ des points de la courbe C ait la dérivée du premier ordre finie et intégrable, et que la fonction $b(s)$ de C soit elle-même finie et intégrable.

Posons:

$$
(3)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = v,
$$

$$
(4)\qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta^2 U.
$$

Les (1), (3), (4) nous donnent:

$$
(5)\quad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma\text{)} & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}, \quad \Delta^2 \theta = f(x, y), \\ \text{(sur la courbe } C\text{)} & u = b(s)\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{da}{ds}\dfrac{dy}{dn} = a_1(s), \quad v = b(s)\dfrac{dy}{dn} - \dfrac{da}{ds}\dfrac{dx}{dn} = b_1(s), \end{cases}
$$

où $a_1(s)$, $b_1(s)$ sont des fonctions des points de C finies et intégrables.

Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ intégrales des équations (5). En vertu de l'équation:

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},
$$

[1] Pour la validité de cette formule on trouvera des conditions beaucoup générales dans une Note de M. T. J. I'A. Bromwich (Proceedings of the London math. society; S. 2:a, T. 3, Parte 5).

on peut écrire:

$$(3)' \qquad u = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial U}{\partial y};$$

et, ensuite,

$$(4)' \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta^2 U.$$

En vertu de l'équation:

$$\Delta^2 \theta = f(x, y)$$

on aura encore:

(dans l'aire σ) $$\Delta^4 U = f(x, y).$$

Les deux dernières des équations (5) nous donnent, ensuite,

(6) (sur la courbe C) $$U = \int_0^s \{a_1(s)dx + b_1(s)dy\} + B = \int_0^s \frac{da}{ds} ds + B,$$

(sur la courbe C) $$\frac{dU}{dn} = a_1(s)\frac{dx}{dn} + b_1(s)\frac{dy}{dn} = b(s),$$

où B est une constante arbitraire.

La détermination de la fonction U dépende des équations $(3)'$. Elles la déterminent à une constante près, et nous pouvons choisir cette constante de sorte qu'en résulte:

(sur la courbe C) $$U = a(s).$$

En concluant, nous pouvons énoncer le théorème suivant: *l'intégration des équations* (1) *peut se ramener toujours à l'intégration des équations* (5), *et réciproquement.*

3. Posons:

$$U_1(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{r^2 \log r}{4} f(\xi, \eta) d\sigma, \qquad V(x, y) = U(x, y) - U_1(x, y).$$

Il vient, en dérivant sous le signe d'intégral,

$$\Delta^2 U_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma (\log r + 1) f(\xi, \eta) d\sigma;$$

et, d'après l'équation (2),

(dans l'aire σ) $$\Delta^4 U_1 = f(x, y).$$

On en conclut donc pour la fonction $V(x, y)$:

$$(1)' \quad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \Delta^4 V = 0, \\ \text{(sur la courbe } C) & V = a(s) - U_1(s) = a_2(s), \quad \dfrac{dV}{dn} = b(s) - \dfrac{dU_1}{dn} = b_2(s), \end{cases}$$

où $a_2(s)$ est une fonction des points de C, qui admette la dérivée du premier ordre finie et intégrable, et où $b_2(s)$ est finie et intégrable sur C. Par conséquent, nous pouvons énoncer le théorème suivant: *l'intégration des équations* (1) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations* (1)'.

De ce théorème en résulte, en vertu du théorème du § 2, le corollaire suivant: *l'intégration des équations* (5) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations*:

$$(5)' \quad \begin{cases} \text{(dans l'aire } \sigma) & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \Delta^2 \theta_1 = \Delta^2 \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \\ \text{(sur la courbe } C) & u_1 = a_3(s), \qquad v_1 = b_3(s), \end{cases}$$

où les fonctions $a_3(s)$, $b_3(s)$, des points de C, sont finies et intégrables.

Remarque I. — La fonction $U_1(x, y)$ a ses dérivées des deux premiers ordres finies et continues dans l'aire σ (les points de la courbe C inclus); par conséquent nous aurons le résultat suivant: *dans le cas particulier où l'on a: $a(s) = b(s) = 0$, si les coordonnées des points de C ont les dérivées des deux premiers ordres finies et continues, la fonction $a_2(s)$ aura ses dérivées des deux premiers ordres finies et continues, la fonction $b_2(s)$ sera finie et continue, ainsi que sa dérivée première; l'intégration des équations* (1) *peut se réduire toujours à l'intégration des équations* (5)', *où les fonctions $a_3(s)$, $b_3(s)$ sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.*

Remarque II. — Les résultats qui précédent sont aussi valables, si au lieu de l'aire finie σ nous considérons l'aire infinie σ', et si, en désignant par ϱ la distance du point variable à l'origine des axes, pour ϱ suffisamment grand, $f(x, y)$ peut se mettre sous la forme $\dfrac{\varphi(x, y)}{\varrho^{4+\varepsilon}}$, $\varphi(x, y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe, ε étant une constante positive.

Il faut observer encore que, dans le cas de l'aire finie σ, l'équation:

$$(5)_1 \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

porte à la condition:

$$(7) \qquad \int_C \{u \cos(ny) - v \cos(nx)\} ds = \int_C \{a_1(s)dx + b_1(s)dy\} = 0,$$

pendant que, dans le cas de l'aire infinie σ', de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

on ne peut pas déduire la condition (7). Alors, dans le cas de l'aire infinie σ', si l'on veut que la fonction U, déterminée par les $(3)'$, soit monodrome, il faut admettre [voir la (6)] que les fonctions $a_1(s)$, $b_1(s)$ satisfaient à la condition (7).

Théorèmes de détermination unique.

4. Soient $u(x, y)$, $v(x, y)$ deux fonctions finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans l'aire σ (les points de la courbe C inclus pour les fonctions u, v et pour leurs dérivées du premier ordre). Supposons que u, v satisfaient aux équations:

$$(5)'' \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Soit χ la fonction *associée* de θ, c'est à dire la fonction déterminée par les équations:

$$(8) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

De ces équations et de la première de $(5)''$ on aura:

$$(9) \qquad \text{(dans l'aire } \sigma) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$0 = \int_\sigma \left[u \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} + v \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \right] d\sigma.$$

Cette formule nous donne, au moyen d'intégrations par parties,

$$0 = \int_\sigma \left\{ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \chi \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \chi \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \right\} d\sigma +$$

$$+ \int_C \left[u \left\{ 2\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) - \chi\cos(ny) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(nx) \right\} + \right.$$

$$\left. + v \left\{ 2\frac{\partial v}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos(ny) + \chi\cos(nx) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(ny) \right\} \right] ds;$$

et, en vertu des $(5)''$,

$$(10) \qquad 0 = 2\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} d\sigma + 2\int_C (u X_s + v Y_s) ds,$$

où l'on a posé:

$$(11) \qquad \begin{cases} X_s = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\chi\right)\cos(ny), \\ Y_s = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\chi\right)\cos(nx) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(ny). \end{cases}$$

La formule (10) est aussi valable si, n'étant pas surs de l'existence et de la continuité des dérivées du premier ordre de u et de v sur la courbe C, on sait que les expressions X_s, Y_s, calculées dans les points d'une courbe C' parallèle à C et intérieure à σ, tendent vers des limites déterminées et finies, lorsque la courbe C' s'approche indéfiniment à C.

1° *Supposons avoir*:

(12) (sur la courbe C) $\qquad u = v = 0$.

La formule (10) nous donne:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};$$

et, par suite,

$$u = hx + k, \qquad v = hy + j,$$

où h, k, j sont des constantes. D'après cela, eu égard à l'hypothèse (12), *on aura:*

$(12)'$ (dans l'aire σ) $\qquad u = v = 0$.

2° *Supposons avoir:*

(13) (sur la courbe C) $\quad X_s = -\delta\cos(ny), \qquad Y_s = \delta\cos(nx)$,

où δ est une constante donnée.

Dans ce cas la (10) dévient:

$$0 = 2\int_{\sigma}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma - 2\delta\int_{C}\{u\cos(ny) - v\cos(nx)\}ds;$$

dont, en vertu de la (7), qui est une conséquence de la première des (5)'', *en résulte:*

(13)' (dans l'aire σ) $u = hx + k, \qquad v = hy + j,$

où h, k, j sont des constantes arbitraires.

5. *Supposons avoir:*

(5)''' (dans l'aire σ') $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2\theta = 0,$

et supposons encore que, pour ϱ suffisamment grand, les fonctions u, v puissent se mettre sous la forme $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho}$ et leurs dérivées du premier ordre sous la forme $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x, y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe.

En se servant de la formule (10), on démontrera, à l'aide de raisonnements bien connus,

(10)' $$0 = 2\int_{\sigma'}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right\}d\sigma' - 2\int_{C}(uX_s + vY_s)ds.$$

3° *On ait:*

(14) (sur la courbe C) $u = v = 0.$

De la (10)', par un raisonnement analogue à celui employé au paragraphe précédent, *on déduit:*

(14)' (dans l'aire σ') $u = v = 0.$

4° *On ait:*

(15) (sur la courbe C) $X_s = Y_s = 0.$

On trouve, à cause de la (10)',

(dans l'aire σ') $u = hx + k, \qquad v = hy + j,$

où h, k, j sont des constantes; et, par conséquent, en se rappelant que u, v s'annulent à l'infini, *on aura:*

(15)' (dans l'aire σ') $u = v = 0$.

6. Des résultats 1° et 3°, que nous avons établis précédemment, on deduit les deux théorèmes suivants:

a) *Si les équations* (5), *où les fonctions* $a_1(s)$, $b_1(s)$ *sont arbitraires, mais assujetties à la condition:*

$$\int_C \{a_1 \cos(ny) - b_1 \cos(nx)\} ds = 0,$$

admettent une solution, celle-ci sera unique.

b) *Si les équations* (5), *où l'on remplace* σ *par* σ' *et où les fonctions* $a_1(s)$, $b_1(s)$ *sont absolument arbitraires, admettent une solution* u, v, *telle que, pour* ϱ *suffisamment grand, les* u, v *peuvent se mettre sous la forme* $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho}$ *et leurs dérivées du premier ordre sous la forme* $\frac{\varphi(x, y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x, y)$ *restant en valeur absolue inférieure à une quantité fixe, il n'y a aucune autre solution, qui jouit des mêmes propriétés à l'infini.*

Extension des formules de Green.

7. Soient u, v; u', v' deux solutions des équations:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0: \tag{16}$$

et supposons que les fonctions u, v; u', v' soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans l'aire σ, les points du contour C (formé par une ou plusieurs courbes fermées) inclus pour les u, v, u', v' et pour leurs dérivées du premier ordre.

On aura, à l'aide d'intégrations par parties et en vertu des équations (16):

$$(17) \left\{ \begin{aligned} 0 = \int_\sigma \Bigg[u' \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\} + \\ + v' \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\} \Bigg] d\sigma \\ - \int_\sigma \Bigg[u \left\{ \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - \frac{\partial \chi'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}\right) \right\} + \end{aligned} \right.$$

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&+ v\left\{\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+\frac{\partial \chi'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right\}\Big]d\sigma =\\
&= -\int_C (u' X_s + v' Y_s)ds + \int_C (u X'_s + v Y'_s)ds,
\end{aligned}\right.
$$

où l'on a désigné par X'_s, Y'_s les expressions (11) calculées pour les fonctions u', v'.

Soit $p \equiv (\xi, \eta)$ un point arbitraire de l'aire σ, éloigné du contour C. Décrivons autour de p une courbe C', intérieure à σ, et désignons par σ_1 l'aire finie limitée par C et C'.

Les fonctions:

$$
(18)\qquad u' = \log r + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2, \qquad v' = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y},
$$

où $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, satisfont dans l'aire σ_1 aux équations (16) et obéissent aux conditions de continuité et de dérivabilité imposées aux fonctions u', v', qui apparissent dans la formule (17). Pour la fonction harmonipue θ' et pour son associée χ' on a:

$$
\theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 2\frac{\partial \log r}{\partial x}, \qquad \chi' = -2\frac{\partial \log r}{\partial y};
$$

et ensuite:

$$
(19)\qquad X'_s = 2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r}{dn}, \qquad Y'_s = -2\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}.
$$

Nous pouvons appliquer la formule (17) au cas de l'aire σ_1, et nous aurons:

$$
0 = \int_C (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v)ds - \int_{C'} (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v)ds'.
$$

Mais la courbe C' est arbitraire et nous pouvons la varier de sorte que l'aire $\sigma - \sigma_1$ soit aussi petite que l'on veut. Ainsi, on trouvera, par des considérations bien connues,

$$
(20)\qquad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C (X_s u' + Y_s v' - X'_s u - Y'_s v)ds.
$$

De même, en introduisant les fonctions

$$
(18)'\qquad u'' = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}, \qquad v'' = \log r + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2,
$$

on aura:

$$(19)' \qquad X''_s = -2\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\log r}{dn}, \qquad Y''_s = 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn};$$

et, par suite,

$$(20)' \qquad v(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C (X_s u'' + Y_s v'' - X''_s u - Y''_s v)ds.$$

8. Les formules (20), (20)' sont parfaitement analogues à la *formule de Green*, bien connue. Elles sont aussi valables, si au lieu de l'aire finie σ on considère l'aire infinie σ' et si, pour ϱ suffisamment grand, les fonctions u, v, qu'elles doivent représenter, peuvent se mettre sous la forme $\frac{\varphi(x,y)}{\varrho}$ et leurs dérivées du premier ordre sous la forme $\frac{\varphi(x,y)}{\varrho^2}$, $\varphi(x,y)$ restant en valeur absolue inférieur à une quantité fixe.

Les formules (20), (20)' sont aussi valables si, n'étant pas surs de l'existence et de la continuité des derivées du premier ordre des fonctions u, v sur la courbe C, on sait que les expressions X_s, Y_s, calculées dans les points d'une courbe C' parallèle à C et intérieure à σ (ou à σ'), tendent vers des limites déterminées et finies, lorsque la courbe C' s'approche indéfiniment à C.

9. Faisons quelque application des formules (20), (20)'.

Nous avons trouvé au § 4 (2°) que les fonctions:

$$u_1 = hx + k, \qquad v_1 = hy + j,$$

où h, k, j sont des constantes arbitraires, forment une solution des équations (16), et qu'on a pour les valeurs des expressions (11), qu'y correspondent,

$$(21) \qquad X_s^{(1)} = -\delta\cos(ny), \qquad Y_s^{(1)} = \delta\cos(nx),$$

où δ est une certaine constante. Cette solution obéit aux conditions, que nous avons posées, pour la validité des formules (20), (20)'; de sorte que nous pourrons écrire:

$$h\xi + k = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X'_s + (hy+j)Y'_s\}ds - \frac{\delta}{2\pi}\int_C \{u'\cos(ny) - v'\cos(nx)\}ds,$$

$$h\eta + j = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X''_s + (hy+j)Y''_s\}ds - \frac{\delta}{2\pi}\int_C \{u''\cos(ny) - v''\cos(nx)\}ds.$$

Remarquons que les solutions u', v' et u'', v'' des équations (16), données par les (18) et (18)', satisfont à la condition (7)[1]; par conséquent, nous pouvons écrire encore:

$$h\xi + k = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X'_s + (hy+j)Y'_s\}\,ds\,.$$

$$h\eta + j = -\frac{1}{2\pi}\int_C \{(hx+k)X''_s + (hy+j)Y''_s\}\,ds\,.$$

Obsérvant que les constantes h, k, j sont arbitraires, on obtient:

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{2\pi}\int_C (xX'_s + yY'_s)\,ds\,, \\ \eta &= -\frac{1}{2\pi}\int_C (xX''_s + yY''_s)\,ds\,; \end{aligned}\right.$$

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &1 = -\frac{1}{2\pi}\int_C X'_s ds\,, \qquad 1 = -\frac{1}{2\pi}\int_C Y''_s ds\,, \\ &0 = -\frac{1}{2\pi}\int_C Y'_s ds = -\frac{1}{2\pi}\int_C X''_s ds\,, \end{aligned}\right.$$

où x, y représentent les coordonnées des points de C; ξ, η représentent les coordonnées d'un point quelconque de l'intérieur de σ.

10. Désignons par u, v une solution quelconque des équations (16), considerées dans l'aire finie σ. L'application de la formule (17) aux deux solutions u, v; u_1, v_1 des équations (16), nous donne:

$$\int_C (u_1 X_s + v_1 Y_s)\,ds = \int_C (u X_s^{(1)} + v Y_s^{(1)})\,ds = -\delta \int_C \{u\cos(ny) - v\cos(nx)\}\,ds\,,$$

d'où résulte, en tenant compte de la condition (7),

$$\int_C (u_1 X_s + v_1 Y_s)\,ds = 0\,.$$

[1] Pour s'en assurer il suffit d'observer que au point p les fonctions u', v'' deviennent infinies comme $\log r$, et que les fonctions v', u'' sont partout finies.

Enfin observant que les constantes h, k, j, qui apparissent dans les fonctions u_1, v_1, sont arbitraires, on parvient aux formules:

$$\int\limits_C X_s ds = \int\limits_C Y_s ds = \int\limits_C (xX_s + yY_s) ds = 0 .$$

CHAPITRE II.

Extension des théorèmes sur les doubles couches.

1. Supposons que la courbe fermée C admette une tangente déterminée en chacun de ses points. Désignons par m le nombre maximum des points d'intersection d'une droite quelconque du plan avec la courbe C; par x, y les coordonnées des points de C; et par ξ, η les coordonnées d'un point quelconque du plan de C. Posons, comme au Chapitre I, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, si le point (ξ, η) n'appartient pas à C, pendant que nous poserons $r' = \sqrt{(x-\xi')^2 + (y-\eta')^2}$, si le point (ξ', η') appartient à C. Et encore, désignons par p le point de coordonnées ξ, η, s'il appartient à l'intérieur de l'aire finie σ, désignons-le par p', s'il appartient à l'intérieur de l'aire infinie σ'.

On a, comme il est bien connu,

$$(1) \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r'}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r'}{dn} ds = -\frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d \log r'}{dn} ds = 0;$$

et encore, pour les points p[1]:

$$(2) \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = -\pi, \qquad \int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{dn} ds = 0;$$

pour les points p':

$$(2)' \qquad \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d \log r}{dn} ds = \int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{dn} ds = 0.$$

Enfin on aura pour toutes positions du point (ξ, η) sur le plan de C,

[1] Comparer avec les formules (23) du Chapitre I.

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left|\frac{d \log r}{d n}\right| ds \leq 2\pi m, \quad \int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \left|\frac{d \log r}{d n}\right| ds < 2\pi m, \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad \int\limits_C \left|\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d \log r}{d n}\right| ds \leq 2\pi m. \end{cases}$$

2. *Soient $u(s)$, $v(s)$ deux fonctions finies et continues des points de la courbe C, données arbitrairement.* Considérons les intégrales:

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle U(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C (X'_s u + Y'_s v) ds, \\ \displaystyle V(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_C (X''_s u + Y''_s v) ds, \end{cases}$$

où X'_s, Y'_s, X''_s, Y''_s sont les expressions données par les formules (19), (19)′ du Chapitre I.

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit. En vertu de la continuité de u et de v, nous pouvons déterminer, pour un point quelconque $s_0 \equiv (\xi', \eta')$ de C, une portion C_1 de C, ayant le point s_0 dans son intérieur, et tel qu'on ait, pour tous ses points s,

$$|u(s) - u(s_0)| < \varepsilon, \qquad |v(s) - v(s_0)| < \varepsilon.$$

Par conséquent, à cause des formules (3), on peut écrire:

$$(5)\quad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} [X'_s \{u(s) - u(s_0)\} + Y'_s \{v(s) - v(s_0)\}] ds\right| \leq 8 m\varepsilon,$$

quel que soit le point (ξ, η) du plan (les points de C inclus).

On a identiquement:

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle U(\xi, \eta) = -\frac{u(s_0)}{\pi}\int\limits_C X'_s ds - \frac{v(s_0)}{\pi}\int\limits_C Y'_s ds - \\ \displaystyle\qquad - \frac{1}{\pi}\int\limits_C [X'_s \{u(s) - u(s_0)\} + Y'_s\{v(s) - v(s_0)\}] ds = \\ \displaystyle\qquad = -\frac{u(s_0)}{\pi}\int\limits_C X'_s ds - \frac{v(s_0)}{\pi}\int\limits_C Y'_s ds - \end{cases}$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{\pi}\int_{C-C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds-\\ &-\frac{1}{\pi}\int_{C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds.\end{aligned}\right.$$

Posons:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha(s,s_0)=2\left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2\frac{d\log r'}{dn}, \qquad \beta'(s,s_0)=2\left(\frac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r'}{dn},\\ &\qquad\beta(s,s_0)=\alpha'(s,s_0)=-2\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn}.\end{aligned}\right.$$

et observons qu'on peut décrire sur le plan de C, de s_0 comme centre, avec un rayon suffisamment petit, un cercle, qui ne contient aucun point de $C-C_1$ dans son intérieur et tel qu'on ait pour un point quelconque p ou p' de son intérieur:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{C-C_1}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{C-C_1}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]ds\right|<\varepsilon.$$

On aura donc, à cause de la (5),

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]ds\right|<\varepsilon+16\,m\varepsilon;$$

et, par conséquent,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{p=s_0}\frac{1}{\pi}\int_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds=\\ &\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]ds,\\ &\lim_{p'=s_0}\frac{1}{\pi}\int_{C}[X'_s\{u(s)-u(s_0)\}+Y'_s\{v(s)-v(s_0)\}]ds=\\ &\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{C}[\alpha(s,s_0)\{u(s)-u(s_0)\}+\beta(s,s_0)\{v(s)-v(s_0)\}]ds.\end{aligned}\right.$$

Les (1), (2), (2)' nous donnent:

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \alpha(s, s_0)\,ds = 1, \quad -\frac{1}{\pi}\int_C X'_s(p)\,ds = 2, \quad -\frac{1}{\pi}\int_C X'_s(p')\,ds = 0,$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_C \beta(s, s_0)\,ds = 0, \quad -\frac{1}{\pi}\int_C Y'_s(p)\,ds = 0, \quad -\frac{1}{\pi}\int_C Y'_s(p')\,ds = 0;$$

par suite, on aura des (6), (8):

$$(9)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=s_0} U(\xi, \eta) = \;\; 2\,u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C [\alpha(s, s_0)\{u(s) - u(s_0)\} + \beta(s, s_0)\{v(s) - v(s_0)\}]\,ds = \\[2ex] \qquad = u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\,u(s) + \beta(s, s_0)\,v(s)\}\,ds, \\[2ex] \lim\limits_{p'=s_0} U(\xi, \eta) = -u(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\,u(s) + \beta(s, s_0)\,v(s)\}\,ds. \end{cases}$$

De même, on obtient:

$$(9)'\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=s_0} V(\xi, \eta) = \quad v(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\,u(s) + \beta'(s, s_0)\,v(s)\}\,ds, \\[2ex] \lim\limits_{p'=s_0} V(\xi, \eta) = -v(s_0) - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\,u(s) + \beta'(s, s_0)\,v(s)\}\,ds. \end{cases}$$

Les formules (9), (9)' sont parfaitement analogues à la *formule de discontinuité d'une double couche.*

3. On vérifie aisément les relations suivantes:

$$(10)\qquad \frac{\partial X'_s}{\partial \eta} = \frac{\partial Y'_s}{\partial \xi} = \frac{\partial X''_s}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial Y'_s}{\partial \eta} = \frac{\partial X''_s}{\partial \eta} = \frac{\partial Y''_s}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial X'_s}{\partial \xi} + \frac{\partial X''_s}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{d\log r}{dn}, \quad \frac{\partial Y'_s}{\partial \xi} + \frac{\partial Y''_s}{\partial \eta} = 2\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{d\log r}{dn},$$

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{2}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{d\log r}{dn}\,u(s) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{d\log r}{dn}\,v(s)\right\}ds,$$

dont il résulte que *les fonctions* $U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$ *sont intégrales des équations:*

$$(11) \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2 \Theta = 0.$$

La fonction associée de Θ, c'est à dire la fonction X déterminée par les équations:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = -\frac{\partial X}{\partial \xi},$$

pourra s'écrire:

$$X(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} u(s) - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} v(s) \right\} ds.$$

Désignons par n_0 la normale au point s_0 de la courbe C; supposons le point (ξ, η) éloigné de C; et posons:

$$P(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 y),$$

$$Q(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \cos(n_0 y).$$

On a:

$$P(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{1}{2}\Theta - \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{1}{2} X\right) \cos(n_0 y) =$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} u + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} v \right\} ds + \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\partial X''_s}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y''_s}{\partial \eta} v \right) ds \right] \cos(n_0 x) +$$

$$+ \left[-\frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\partial X'_s}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y'_s}{\partial \eta} v \right) ds - \frac{1}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{d \log r}{dn} u - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{d \log r}{dn} v \right\} ds \right] \cos(n_0 y).$$

À cause des formules (10) et des rélations:

$$\cos(n_0 x) = \left(\frac{dx}{dn}\right)_{s=s_0} = -\left(\frac{dy}{ds}\right)_{s=s_0} = -\cos(s_0 y),$$

$$\cos(n_0 y) = \left(\frac{dy}{dn}\right)_{s=s_0} = \left(\frac{dx}{ds}\right)_{s=s_0} = \cos(s_0 x),$$

et en introduisant les notations:

$$\frac{d}{dn_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos(n_0 x) + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos(n_0 y), \qquad \frac{d}{ds_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\cos(s_0 x) + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos(s_0 y),$$

on a encore:

$$\begin{aligned} P(\xi,\eta)_0 = &-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds \\ &-\frac{1}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial X''_s}{\partial \eta}\cos(s_0 y) + \frac{\partial Y'_s}{\partial \xi}\cos(s_0 x)\right\} u\,ds - \\ &-\frac{1}{\pi}\int_C \left\{\frac{\partial Y''_s}{\partial \eta}\cos(s_0 y) + \frac{\partial Y''_s}{\partial \xi}\cos(s_0 x)\right\} v\,ds = \\ = &-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds + \\ &+\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn} u\,ds - \frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} v\,ds. \end{aligned}$$

Pareillement on aura:

$$\begin{aligned} Q(\xi,\eta)_0 = &-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} v\,ds - \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{d\log r}{dn} u\,ds - \\ &-\frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn} v\,ds + \frac{2}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int_C \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn} u\,ds. \end{aligned}$$

4. On vérifie aisément les identitées suivantes:

$$\frac{d}{dn_0}\frac{d\log r}{dn} = -\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{ds}, \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} = \frac{d}{dn_0}\frac{d\log r}{ds},$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}\right) &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{ds}\frac{d\log r}{dn_0} + \frac{d\log r}{dn_0}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds_0}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn}\right\} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{ds_0}\frac{d\log r}{dn} + \frac{d\log r}{dn}\,2\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d}{ds}\frac{d\log r}{dn_0} + \frac{d\log r}{dn_0}\, 2\, \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\},$$

$$\frac{d}{ds_0}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn}\right\} = \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\}.$$

Par suite, on peut écrire:

$$P(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int\limits_C \frac{d\log r}{ds} u\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int\limits_C \frac{d\log r}{ds} v\,ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{d}{ds}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\right\} u\,ds - \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{d}{ds}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\right\} v\,ds;$$

et, si l'on admette que *les fonctions $u(s)$, $v(s)$, des points de la courbe C, aient les dérivées du premier ordre $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ partout finies et continues,* en résultera, à l'aide d'intégrations par parties,

$$P(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{ds_0}\int\limits_C \log r \frac{du}{ds} ds - \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn_0}\int\limits_C \log r \frac{dv}{ds} ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn_0}\frac{du}{ds} ds + \frac{2}{\pi}\int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn_0}\frac{dv}{ds} ds;$$

et ensuite:

$$P(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{d\log r}{ds}\cdot\frac{du}{ds} ds + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{dv}{ds} ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{du}{ds} ds - \frac{2}{\pi}\int\limits_C \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\log r}{dn}\frac{dv}{ds} ds -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs) - \cos(rs_0)}{r} ds - \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds + \frac{2}{\pi}\int\limits_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds,$$

où:

$$\cos(rs) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(sx) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(sy), \qquad \cos(rs_0) = -\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos(s_0 x) - \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos(s_0 y).$$

$$\cos(rn) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(ny), \qquad \cos(rn_0) = -\frac{\partial r}{\partial \xi}\cos(n_0 x) - \frac{\partial r}{\partial \eta}\cos(n_0 y).$$

Il ne sera pas inutile de rappeler que le point (ξ, η) est supposé toujours éloigné de C

5. Supposons maintenant que *les coordonnées des points de C, considérées comme fonctions de s, soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres.* Alors, à cause de la continuité des fonctions $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, on peut affirmer que *les expressions:*

$$\int_C \frac{du}{ds} \cdot \frac{\cos(rs) - \cos(rs_0)}{r} ds, \quad \int_C \frac{dv}{ds} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds,$$

$$\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds, \quad \int_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} ds,$$

tendent uniformément vers des limites déterminées et finies, lorsque le point (ξ, η), toujours éloigné de C, s'approche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.

En effet, remarquons d'abord que l'on a:

$$\frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} = \frac{2\sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2} \cdot \sin\frac{(nn_0)}{2}}{r'} \cdot \frac{r'}{r} = \frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}} \cdot \sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2} \cdot \frac{r'}{r};$$

et, si nous supposons, pour le moment, que le point p (ou p') soit sur la normale n_0, on pourra écrire:

$$\frac{\cos(rn) - \cos(rn_0)}{r} = \frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}} \cdot \sin\frac{(rn)+(rn_0)}{2} \cdot \frac{\sin(rn_0)}{\sin(r'n_0)}.$$

Des propriétés admises pour la courbe C, en résulte, qu'on peut fixer un nombre positif A tel que l'on ait, indépendamment de la position de s_0 sur C,

$$\left| \frac{\sin\frac{(nn_0)}{2}}{\frac{r'}{2}} \right| < A.$$

En outre, si l'on donne un nombre positif r inférieur à l'unité et un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, un segment δ tel que, pour la portion C_1 de C, dont les points ont de n_0 une distance non supérieure à δ, on ait:

$$|\sin(r'n_0)| > r, \qquad \frac{A \cdot M}{r}\int_{C_1} ds < \frac{\varepsilon}{3},$$

où M est le maximum des valeurs absolues de $\frac{dv}{ds}$. Alors nous pourrons écrire:

$$\left|\int_{C_1}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\int_{C_1}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(r'n)-\cos(r'n_0)}{r'}ds\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En dépendance du segment δ, déjà fixé, et indépendamment de la position de s_0 sur C, on peut fixer, ensuite, un autre segment δ' tel que pour $ps_0 < \delta'$ (ou pour $p's_0 < \delta'$) l'on ait:

$$\left|\int_{C-C_1}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds - \int_{C-C_1}\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(r'n)-\cos(r'n_0)}{r'}ds\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par conséquent, nous pouvons écrire, pour p (ou p') sur n_0 et pour $ps_0 < \delta'$, (ou pour $p's_0 < \delta'$):

$$\left|\int_C\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds - \int_C\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(r'n)-\cos(r'n_0)}{r'}ds\right| < \varepsilon.$$

Eu égard à l'indépendance du segment δ' de la position de s_0 sur C, cette formule nous porte à conclure que *l'on a:*

$$\lim_{p=s_0}\int_C\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds = \lim_{p'=s_0}\int_C\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}ds =$$

$$= \int_C\frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(r'n)-\cos(r'n_0)}{r'}ds,$$

lorsque le point p (ou p') se rapproche vers de s_0, suivant une direction quelconque. De même l'on aura:

$$\lim_{p=s_0}\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs)-\cos(rs_0)}{r}\,ds=\lim_{p'=s_0}\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs)-\cos(rs_0)}{r}\,ds=$$

$$=\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(r's)-\cos(r's_0)}{r'}\,ds,$$

$$\lim_{p=s_0}\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds=\lim_{p'=s_0}\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds=$$

$$=\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\cdot\frac{\cos(r'n)-\cos(r'n_0)}{r'}\,ds,$$

. . . .

6. Introduisant la notation:

$$A(\xi,\eta)_0=-\frac{1}{\pi}\int_C \frac{du}{ds}\cdot\frac{\cos(rs)-\cos(rs_0)}{r}\,ds-\frac{1}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_C \frac{du}{ds}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds+\frac{2}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\cos(rn)-\cos(rn_0)}{r}\,ds.$$

on peut écrire:

$$\lim_{p=s_0} A(\xi,\eta)_0-\lim_{p'=s_0} A(\xi,\eta)_0=0. \tag{12}$$

En outre, si dans les (9)′ nous remplaçons les u, v respectivement par $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, et si ensuite nous retranchons, on déduit:

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\lim_{p=s_0}\left\{\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{du}{ds}ds-\frac{2}{\pi}\int_C\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{dv}{ds}ds\right\}-\\&-\lim_{p'=s_0}\left\{\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{du}{ds}ds-\frac{2}{\pi}\int_C\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d\log r}{dn}\cdot\frac{dv}{ds}ds\right\}=2\left(\frac{dr}{ds}\right)_{s=s_0}\end{aligned}\right.$$

On a encore, comme il est bien connu,

$$\lim_{p=s_0}\frac{1}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\frac{d\log r}{dn}\,ds-\lim_{p'=s_0}\frac{1}{\pi}\int_C \frac{dv}{ds}\frac{d\log r}{dn}\,ds=-2\left(\frac{dv}{ds}\right)_{s=s_0}. \tag{14}$$

Enfin, si l'on fait la supposition que *la fonction* $u(s)$ *ait la dérivée du deuxième ordre finie et intégrable*, on obtiendra, au moyen d'une intégration par parties,

$$\int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = -\int\limits_C \log r \frac{d^2 u}{ds^2} ds;$$

et, par conséquent:

$$\text{(15)} \qquad \lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds - \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = 0.$$

Des (12), (13), (14), (15) en résultera:

$$\text{(16)} \qquad \lim_{p=s_0} P(\xi, \eta)_0 - \lim_{p'=s_0} P(\xi, \eta)_0 = 0.$$

C'est la formule que nous voulions établir.

Pareillement, si l'on suppose que *la fonction* $v(s)$ *ait la dérivée du deuxième ordre finie et intégrable*, on aura:

$$\text{(16)}' \qquad \lim_{p=s_0} Q(\xi, \eta)_0 - \lim_{p'=s_0} Q(\xi, \eta)_0 = 0.$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème: *si les coordonnées des points de* C, *considerées comme fonctions de* s, *sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres, si les fonctions* $u(s)$, $v(s)$ *ont les dérivées du deuxième ordre finies et intégrables, on aura que les expressions* $P(\xi, \eta)_0$, $Q(\xi, \eta)_0$ *tendent uniformément vers des limites déterminées et finies, lorsque le point* (ξ, η), *toujours éloigné de* C, *se rapproche indéfiniment du point* s_0 *de* C, *suivant une direction quelconque; et les limites qu'on obtient, lorsque le point variable* (ξ, η) *appartient à* σ, *sont égaux aux limites qu'on obtient, lorsque le point variable* (ξ, η) *appartient à* σ'.

Ce théorème est parfaitement analogue au *théorème sur la continuité de la dérivée normale d'une double couche.*

7. Il faut observer que la condition de l'existance et de l'intégrabilité des dérivées du deuxième ordre de $u(s)$ et de $v(s)$ sur C, a été introduite pour établir la (15); pendant que pour établir les (12), (13), (14) il suffisait supposer que les dérivées premières de $u(s)$ et de $v(s)$ fussent finies et continues. Par suite, si l'on suppose que les dérivées du premier ordre de $u(s)$, $v(s)$ soient finies et continues sur C, on pourra démontrer pour les expressions:

$$\text{(17)} \qquad P(\xi, \eta)_0 - \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds, \qquad Q(\xi, \eta)_0 - \frac{1}{\pi} \int\limits_C \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} ds$$

le même théorème énoncé plus haut pour les expressions $P(\xi, \eta)_0$, $Q(\xi, \eta)_0$. *À fortior* nous pouvons énoncer le résultat suivant: *si les fonctions $u(s)$, $v(s)$ des points de la courbe C sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, et si les expressions* (17) *admettent des limites finies, lorsque le point (ξ, η) de σ (ou de σ') se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque, ces expressions admettront les mêmes limites, lorsque le point (ξ, η) de σ' (ou de σ) se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.*

8. Ce théorème vaut aussi pour l'expression:

$$B = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \log r}{d s} \cdot \frac{du}{ds} ds.$$

En effet, supposons, pour le moment, que le point p soit sur la normale n_0; et prenons pour origine des axes le point s_0, pour axe des x la tangente au point s_0 de C et pour axe de y la normale n_0.

Observons, avant tout, qu'on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, un segment δ tel que, pour les points de C, qui ont de n_0 une distance non supérieure à δ, on ait:

$$y = (a + \varepsilon)x^2, \qquad \cos(ys) = (b + \varepsilon')x,$$

où a et b sont des constantes finies, et où ε, ε' sont des infiniments petits par rapport à x.

Ensuite, ayant donné un nombre positif α, aussi petit qu'on veut, on peut fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, une portion C_1 de C, qui contient le point s_0 dans son intérieur, et telle que la distance de ses points de n_0 soit non supérieure à δ et que l'on ait:

$$\frac{1}{\pi}\int_{C_1}\left|\frac{du}{ds}\right| ds < \alpha.$$

En posant:

$$r_0^2 = x^2 + \eta^2,$$

on aura:

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{x^2 + \eta^2}{x^2 + \eta^2 + y^2 - 2y\eta} < 1 + \frac{|2y\eta - y^2|}{r^2} = 1 + \frac{|2y(\eta - y) + y^2|}{r^2}$$

$$< 1 + 2\left|\frac{y}{x}\right| + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^2;$$

et, par conséquent, pour tous les points de C_1,

$$\frac{r_0^2}{r^2} = \{ 1 + \theta \, | (a + \varepsilon) x | \}^2,$$

où θ est une quantité qui dépende de x et qui est comprise entre -1 et 1. On pourra donc écrire:

$$B_1(p) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \left\{ \frac{x}{r^2} \cos(sx) + \frac{y - \eta}{r^2} \cos(sy) \right\} \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2} \cos(sx) \frac{du}{ds} ds +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \left\{ \frac{x}{r_0^2} (2 \theta \, | (a + \varepsilon) x | + \theta^2 (a + \varepsilon)^2 x^2) \cos(sx) + \frac{y - \eta}{r^2} (b + \varepsilon') x \right\} \frac{du}{ds} ds.$$

Par suite, ayant donné un nombre positif β arbitrairement petit, nous pouvons fixer, indépendamment de la position de s_0 sur C, une portion C_1 de C, qui contient s_0 dans son intérieur, et telle que l'on ait:

$$B_1(p) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2} \cos(sx) \frac{du}{ds} ds + \theta_1 c \beta,$$

où c est une constante finie et positive, et où θ_1 est compris entre -1 et 1.

De même on aura pour le point p', si l'on suppose $p' = (0, -\eta)$,

$$B_1(p') = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds = \frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} \frac{x}{r_0^2} \cos(sx) \frac{du}{ds} ds + \theta'_1 c \beta.$$

où θ'_1 est compris entre -1 et 1. On a donc:

$$B_1(p) - B_1(p') = (\theta_1 - \theta'_1) c \beta.$$

Ayant posé:

$$B_2 = \int\limits_{C - C_1} \frac{d \log r}{ds} \cdot \frac{du}{ds} ds,$$

on peut fixer, en dépendance du segment δ, fixé plus haut, et indépendamment de la position de s_0 sur C, un autre segment δ' tel que, pour $|\eta| < \delta'$, l'on ait:

$$| B_2(p) - B_2(p') | < \beta.$$

En concluant, nous pouvons écrire pour $|\eta| < \delta'$:

$$| B(p) - B(p') | < (2c + 1) \beta.$$

Eu égard à l'indépendance du segment δ' de la position de s_0 sur C, cette formule nous porte à conclure, comme nous voulions l'établir, que si l'expression B admet une limite déterminée et finie, lorsque le point (ξ, η) de σ (ou de σ') se rapproche indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque, elle admettra la même limite, lorsque le point (ξ, η) de σ' (ou de σ) se rapproche pareillement indéfiniment du point s_0 de C, suivant une direction quelconque.

Ce résultat-ci et celui du numéro précédent nous donnent le théorème suivant: *si les fonctions $u(s)$, $v(s)$ des points de la courbe C sont finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, et s'il existe une des limites qui apparaissent dans la formule* (16) [*ou dans la formule* (16)'], *existera l'autre limite, qui apparaît dans la même formule, et les deux limites seront égaux.*

Avec des considérations plus compliquées, nous pourrions démontrer le même théorème par des conditions moins restrictives sur la nature des fonctions $u(s)$, $v(s)$.[1]

Extension des théorèmes sur les simples couches.

9. Soient $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ deux fonctions finies et continues des points de la courbe C. Formons avec ces deux fonctions les expressions:

$$(18)\qquad \begin{cases} u_1(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \left[\left\{\log r + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\varphi_1(s) + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\psi_1(s)\right] d\,s, \\ v_1(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \left[\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\varphi_1(s) + \left\{\log r + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}\psi_1(s)\right] d\,s. \end{cases}$$

Les fonctions $u_1(\xi,\eta)$, $v_1(\xi,\eta)$ sont finies et continues dans tous les points du plan de C, dont les coordonnées ξ,η sont finies; lorsque le point variable (ξ,η) s'éloigne indéfiniment sur le plan, elles se comportent, en général, comme $\log\varrho$.[2]

On peut vérifier aisément que les fonctions $u_1(\xi,\eta)$, $v_1(\xi,\eta)$ satisfont aux équations:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2\theta_1 = \Delta^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) = 0,$$

et que la fonction *associée* de θ_1 est:

[1] On peut voir: Liapounoff. — *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, s. 5ª, t. IX, 1898).

[2] Rappelons qu'on a désigné par ρ la distance du point (ξ,η) à l'origine des axes.

$$\chi_1(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_C \left(\frac{\partial \log r}{\partial \eta} \varphi_1 - \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \psi_1 \right) d s.$$

10. Considérons les expressions:

$$(19) \quad \begin{cases} U_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) \cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \chi_1 \right) \cos(n_0 y), \\ V_1(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \chi_1 \right) \cos(n_0 x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) \cos(n_0 y). \end{cases}$$

En posant:

$$X'(\xi, \eta)_0 = 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

$$Y'(\xi, \eta)_0 = X''(\xi, \eta)_0 = -2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

$$Y''(\xi, \eta)_0 = 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial \xi} \cos(n_0 x) + \frac{\partial \log r}{\partial \eta} \cos(n_0 y) \right\},$$

on trouve:

$$U_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C \{ X'(\xi, \eta)_0 \varphi_1 + Y'(\xi, \eta)_0 \psi_1 \} d s,$$

$$V_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C \{ X''(\xi, \eta)_0 \varphi_1 + Y''(\xi, \eta)_0 \psi_1 \} d s,$$

ou encore:

$$U_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi} \int_C (X'_s \varphi_1 + Y'_s \psi_1) d s$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_C [\{ X'_s + X'(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y'_s + Y'(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] d s.$$

$$V_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{\pi} \int_C (X''_s \varphi_1 + Y''_s \psi_1) d s -$$
$$- \frac{1}{\pi} \int_C [\{ X''_s + X''(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y''_s + Y''(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] d s.$$

Les intégrales:

$$A'_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi} \int_C [\{ X'_s + X'(\xi, \eta)_0 \} \varphi_1 + \{ Y'_s + Y'(\xi, \eta)_0 \} \psi_1] d s,$$

$$B'_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{\pi}\int_C [\{X''_s + X''(\xi, \eta)_0\}\varphi_1 + \{Y''_s + Y''(\xi, \eta)_0\}\psi_1]\, ds$$

sont de la même nature que l'expression $A(\xi, \eta)_0$ du § 6; par conséquent, si nous supposons que la courbe C satisfait aux mêmes conditions du § 5, on aura:

$$\lim_{p=s_0} A'_1(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} A'_1(\xi, \eta)_0 = A'_1(s_0),$$

$$\lim_{p=s_0} B'_1(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} B'_1(\xi, \eta)_0 = B'_1(s_0),$$

où $A'_1(s_0)$, $B'_1(s_0)$ désignent ce que les expressions $A'_1(\xi, \eta)_0$, $B'_1(\xi, \eta)_0$ diviennent au point $s_0 \equiv (\xi', \eta')$ de C.

On vérifie aisément que les valeurs des expressions $X'(\xi, \eta)_0$, $Y'(\xi, \eta)_0$, $X''(\xi, \eta)_0$, $Y''(\xi, \eta)_0$ au point $s_0 \equiv (\xi', \eta')$, quel que ce soit, sont respectivement égaux à ce que déviennent les expressions $\alpha(s, s_0)$, $\beta(s, s_0)$, $\alpha'(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, lorsque l'on échange s avec s_0. Par conséquent, si l'on désigne par $U_1(s_0)$, $V_1(s_0)$ ce que déviennent respectivement les expressions $U_1(\xi, \eta)_0$, $V_1(\xi, \eta)_0$ au point s_0 de C, on pourra écrire:

$$(20) \qquad \begin{cases} U_1(s_0) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s_0, s)\varphi_1 + \beta(s_0, s)\psi_1\}\, ds, \\[2ex] V_1(s_0) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s_0, s)\varphi_1 + \beta'(s_0, s)\psi_1\}\, ds; \end{cases}$$

$$A'_1(s_0) = -\frac{1}{\pi}\int_C [\{\alpha(s, s_0) + \alpha(s_0, s)\}\varphi_1 + \{\beta(s, s_0) + \beta(s_0, s)\}\psi_1]\, ds,$$

$$B'_1(s_0) = -\frac{1}{\pi}\int_C [\{\alpha'(s, s_0) + \alpha'(s_0, s)\}\varphi_1 + \{\beta'(s, s_0) + \beta'(s_0, s)\}\psi_1]\, ds;$$

et encore, en vertu des formules (9), (9'),

$$(21) \qquad \lim_{p=s_0} U_1(\xi, \eta)_0 = -\varphi_1(s_0) + U_1(s_0), \qquad \lim_{p=s_0} V_1(\xi, \eta)_0 = -\psi_1(s_0) + V_1(s_0);$$

$$(21)' \qquad \lim_{p'=s_0} U_1(\xi, \eta)_0 = \varphi_1(s_0) + U_1(s_0), \qquad \lim_{p'=s_0} V_1(\xi, \eta)_0 = \psi_1(s_0) + V_1(s_0).$$

Ces formules sont parfaitement analogues à la *formule de discontinuité de la dérivée normale d'une simple couche.*

CHAPITRE III.

Résolution du problème intérieur.

1. Écrivons les équations:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0; \tag{1}$$

et rappelons qu'on a posé au Chapitre précédent (§ 2):

$$\begin{cases} \alpha(s, s_0) = 2 \left(\dfrac{\partial r'}{\partial y} \right)^2 \dfrac{d \log r'}{dn}, \qquad \beta'(s, s_0) = 2 \left(\dfrac{\partial r'}{\partial x} \right)^2 \dfrac{d \log r'}{dn}, \\ \beta(s, s_0) = \alpha'(s, s_0) = -2 \dfrac{\partial r'}{\partial x} \dfrac{\partial r'}{\partial y} \dfrac{d \log r'}{dn}. \end{cases} \tag{2}$$

Supposons que *les coordonnées des points de la courbe C, considérées comme fonctions de s, soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées des trois premiers ordres.* Alors les fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\alpha'(s, s_0) = \beta(s, s_0)$ des variables indépendantes s, s_0 seront finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à s_0, pour tous les valeurs de s et de s_0, qui correspondent aux points de la courbe C.

Soient $u(s)$, $v(s)$ deux fonctions arbitraires des points de C finies et continues, et assujetties à la condition:

$$\int_C \{u(s) \cos(sx) + v(s) \cos(sy)\} ds = 0. \tag{3}$$

Cette condition est nécessaire, si l'on veut que $u(s)$, $v(s)$ puissent représenter les valeurs aux points de C, d'une solution des équations (1), considerées dans l'aire finie σ.

Considérons le système d'équations fonctionnelles:

$$\begin{cases} u(s_0) = \varphi(s_0) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0) \varphi(s) + \beta(s, s_0) \psi(s)\} ds, \\ v(s_0) = \psi(s_0) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0) \varphi(s) + \beta'(s, s_0) \psi(s)\} ds, \end{cases} \tag{4}$$

et le système d'équations homogènes:

$$(5)\quad \begin{cases} 0=\varphi_1(s_0)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha\,(s,s_0)\,\varphi_1(s)+\beta\,(s,s_0)\,\psi_1(s)\}\,ds, \\ 0=\psi_1(s_0)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s,s_0)\,\varphi_1(s)+\beta'(s,s_0)\,\psi_1(s)\}\,ds. \end{cases}$$

Posons:

$$(2)'\quad \begin{cases} X'(s_0,s)_0=2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial y}\right)^2\dfrac{d\log r'}{dn_0}, \qquad Y''(s_0,s)_0=2\left(\dfrac{\partial r'}{\partial x}\right)^2\dfrac{d\log r'}{dn_0}, \\ Y'(s_0,s)_0=X''(s_0,s)_0=-2\dfrac{\partial r'}{\partial x}\dfrac{\partial r'}{\partial y}\dfrac{d\log r'}{dn_0}, \end{cases}$$

et remarquons, comme au Chapitre précédent (§ 10), que nous pouvons obtenir les fonctions $X'_s(s_0,s)$, $Y''_s(s_0,s)$, $Y'_s(s_0,s)=X''_s(s_0,s)$ respectivement des fonctions $\alpha(s,s_0)$, $\beta'(s,s_0)$, $\beta(s,s_0)=\alpha'(s,s_0)$ en échangeant, dans ces dernières fonctions, la s avec la s_0, et inversement.

Ceci posé, considérons encore le système d'équations fonctionnelles homogènes:

$$(5)'\quad \begin{cases} 0=\varphi'_1(s_0)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha\,(s_0,s)\,\varphi'_1(s)+\beta\,(s_0,s)\,\psi'_1(s)\}\,ds, \\ 0=\psi'_1(s_0)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s_0,s)\,\varphi'_1(s)+\beta'(s_0,s)\,\psi'_1(s)\}\,ds, \end{cases}$$

que l'on peut obtenir du système (5) en échangeant dans les fonctions $\alpha(s,s_0)$, $\beta'(s,s_0)$, $\beta(s,s_0)=\alpha'(s,s_0)$, qui contiennent, la s avec la s_0. Nous appelerons les équations (5), (5)': *équations fonctionnelles associées.*

Puisque les fonctions (2), (2)' des variables s, s_0 sont toujours finies et continues, on pourra énoncer, en vertu des résultats, bien connus, de M. Fredholm,[1] les théorèmes suivants:

1:o) *si les équations* (4) *admettent une solution, celle-ci sera finie et continue;*

2:o) *si les équations* (5) *ou* (5)' *admettent des solutions différentes de zéro, ces solutions seront finies et continues;*

3:o) *si les équations* (5) *admettent m solutions linéairement indépendantes, on aura que les équations associées* (5)' *admettront aussi m solutions linéairement indépendantes; et réciproquement.*

[1] *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* — Acta mathematica, t. 27.

2. Les équations $(5)'$ admettent la solution différente de zéro:

$$\varphi'_1(s) = \cos(ny), \qquad \psi'_1(s) = -\cos(nx). \tag{6}$$

En effet, on a:

$$\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s_0, s)\cos(ny) - \beta(s_0, s)\cos(nx)\}\,ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \left\{\left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r'}{dn_0}\cos(ny) + \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn_0}\cos(nx)\right\} ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn_0}\frac{dr'}{dn}\,ds = \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{dr'}{dn_0}\frac{d\log r'}{dn}\,ds =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn}\left\{\frac{\partial r'}{\partial \xi}\cos(n_0x) + \frac{\partial r'}{\partial \eta}\cos(n_0y)\right\} ds =$$

$$= -\frac{2\cos(n_0x)}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial r'}{\partial y}\frac{d\log r'}{dn}\,ds - \frac{2\cos(n_0y)}{\pi}\int_C \left(\frac{\partial r'}{\partial y}\right)^2 \frac{d\log r'}{dn}\,ds = \cos(n_0y),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s_0, s)\cos(ny) - \beta'(s_0, s)\cos(nx)\}\,ds = -\frac{2}{\pi}\int_C \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{d\log r'}{dn_0}\frac{dr'}{dn}\,ds = -\cos(n_0x).$$

On aura donc, en vertu du théorème 3:0), que *les équations* (5) *admettent, au moins, une solution différente de zéro.*

3. Désignons par $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ cette solution, et considérons les fonctions:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C \{X'_s\,\varphi_1(s) + Y'_s\,\psi_1(s)\}\,ds,$$

$$\Psi_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi}\int_C \{X''_s\,\varphi_1(s) + Y''_s\,\psi_1(s)\}\,ds,$$

formées avec les $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$.

On vérifie aisément que les fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ satisfont toujours aux équations (1). On aura encore, en vertu de la continuité (théorème 2:0) des fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ et en vertu des formules (9), $(9)'$ du Chapitre précédent et des équations (5),

$$\lim_{p=s_0}\Phi_1(\xi, \eta) = \varphi_1(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)\,\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\,\psi_1(s)\}\,ds = 0,$$

$$\lim_{p=s_0} \Psi_1(\xi, \eta) = \psi_1(s_0) - \frac{1}{\pi} \int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\} ds = 0;$$

$$(7) \quad \begin{cases} \lim\limits_{p'=s_0} \Phi_1(\xi, \eta) = -\varphi_1(s_0) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\psi_1(s)\} ds = -2\varphi_1(s_0), \\[2ex] \lim\limits_{p'=s_0} \Psi_1(\xi, \eta) = -\psi_1(s_0) - \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\} ds = -2\psi_1(s_0). \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules nous donnent, en vertu du résultat 1° établi au § 4 du Chapitre I,

(dans l'aire σ) $$\Phi_1(\xi, \eta) = \Psi_1(\xi, \eta) = 0;$$

et, par conséquent, l'on aura encore, quel que ce soit le point (ξ, η) de l'aire σ,

$$\Theta_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = 0.$$

4. Les équations:
$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}$$

nous donnent, pour la fonction associée de $\Theta_1(\xi, \eta)$,

(dans l'aire σ) $$\Gamma_1(\xi, \eta) = \text{const.}$$

On aura donc, quel que ce soit le point $p \equiv (\xi, \eta)$ de σ et quel que ce soit le point $s_0 \equiv (\xi', \eta')$ de C,

$$P_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}\right)\cos(n_0 x) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\Gamma_1\right)\cos(n_0 y) = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y),$$

$$Q_1(\xi, \eta)_0 = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\Gamma_1\right)\cos(n_0 x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\right)\cos(n_0 y) = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x).$$

En vertu de ce que l'on a remarqué au § 4 du Chapitre I, après avoir écrit les (11), et au § 8 du même Chapitre, nous pouvons prendre pour les valeurs, aux points de C, des expressions $X_s^{(1)}$, $Y_s^{(1)}$ correspondantes aux intégrales $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ des équations (1), c'est à dire pour les valeurs des expressions (11) du Chapitre I, correspondantes aux fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$, les limites suivantes:

$$\overline{X}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} P_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad \overline{Y}_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} Q_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x).$$

Puisque, comme l'on a remarqué au § 1, les fonctions $\alpha(s, s_0)$, $\beta'(s, s_0)$, $\alpha'(s, s_0) = \beta(s, s_0)$ ont leurs derivées du premier ordre finies et continues, on aura des (5), en dérivant, que les fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi'_1(s)$ admettent les dérivées du premier ordre, qui seront finies et continues sur C. Alors nous pouvons appliquer aux expressions $P_1(\xi, \eta)_0$, $Q_1(\xi, \eta)_0$ le théorème du § 8 du Chapitre précédent, et ainsi nous aurons pour les expressions $X_s^{(1)}$, $Y_s^{(1)}$ [les (11) du Chapitre I], correspondantes aux intégrales $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ des équations (1), considérées dans l'aire infinie σ',

$$\bar{X}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{2} \Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad \bar{Y}_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2} \Gamma_1 \cos(n_0 x),$$

où Γ_1 est une constante.

5. Remarquons que la constante Γ_1 doit être différente de zéro. En effet, admettons qu'il soit $\Gamma_1 = 0$. On aura:

(sur la courbe C) $\qquad X_s^{(1)} = Y_s^{(1)} = 0.$

Alors, en observant que les intégrales $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$ des équations (1) se comportent aux points à l'infini du plan de C comme la fonction ϱ, on pourra appliquer le resultat 4°, établi au § 5 du Chapitre I. Ainsi l'on aura:

(dans l'aire σ') $\qquad \Phi_1(\xi, \eta) = \Psi_1(\xi, \eta) = 0;$

et, en vertu des (7),

(sur la courbe C) $\qquad \varphi_1(s) = \psi'_1(s) = 0,$

pendant que, par hypothèse, la solution $\varphi_1(s)$, $\psi'_1(s)$ des équations (5) est différente de zéro.

6. Cela posé, supposons que les équations (5) admettent une autre solution $\varphi_2(s)$, $\psi'_2(s)$, différente de zéro.

Formons avec cette solution $\varphi_2(s)$, $\psi'_2(s)$ les fonctions $\Phi_2(\xi, \eta)$, $\Psi_2(\xi, \eta)$; $\Theta_2(\xi, \eta)$, $\Gamma_2(\xi, \eta)$; $P_2(\xi, \eta)_0$, $Q_2(\xi, \eta)_0$; $X_s^{(2)}$, $Y_s^{(2)}$; $\bar{X}_s^{(2)}$, $\bar{Y}_s^{(2)}$, analogues aux fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$; $\Theta_1(\xi, \eta)$, $\Gamma_1(\xi, \eta)$; $P_1(\xi, \eta)_0$, $Q_1(\xi, \eta)_0$; $X_s^{(1)}$, $Y_s^{(1)}$; $\bar{X}_s^{(1)}$, $\bar{Y}_s^{(1)}$, formées, précédemment, avec la solution $\varphi_1(s)$, $\psi'_1(s)$. On aura, comme au § 4,

$$\bar{X}_s^{(2)} = \lim_{p'=s_0} P_2(\xi, \eta)_0 = -\frac{1}{2} \Gamma_2 \cos(n_0 y), \qquad \bar{Y}_s^{(2)} = \lim_{p'=s_0} Q_2(\xi, \eta)_0 = \frac{1}{2} \Gamma_2 \cos(n_0 x),$$

où Γ_2 est une constante différente de zéro.

Déterminons maintenant une constante b, telle que l'on ait:

$$\Gamma_1 + b\,\Gamma_2 = 0; \tag{8}$$

et envisageons les fonctions:

$$\varphi_3(s) = \varphi_1(s) + b\,\varphi_2(s), \qquad \psi_3(s) = \psi_1(s) + b\,\psi_2(s). \tag{9}$$

Évidemment ces fonctions forment une solution des équations (5); et si nous formons avec cette solution $\varphi_3(s)$, $\psi_3(s)$ les fonctions $\Phi_3(\xi, \eta)$, $\Psi_3(\xi, \eta)$; $\Theta_3(\xi, \eta)$, $\Gamma_3(\xi, \eta)$; $P_3(\xi, \eta)_0$, $Q_3(\xi, \eta)_0$; $X_s^{(3)}$, $Y_s^{(3)}$; $\overline{X}_s^{(3)}$, $\overline{Y}_s^{(3)}$, analogues aux fonctions $\Phi_1(\xi, \eta)$, $\Psi_1(\xi, \eta)$; ...... on aura encore:

$$X_s^{(3)} = \lim_{p'=s_0} P_3(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi, \eta)_0 + b \lim_{p'=s_0} P_2(\xi, \eta)_0 =$$

$$= -\frac{1}{2}(\Gamma_1 + b\,\Gamma_2)\cos(n_0 y) = -\frac{1}{2}\Gamma_3 \cos(n_0 y),$$

$$Y_s^{(3)} = \lim_{p'=s_0} Q_3(\xi, \eta)_0 = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi, \eta)_0 + b \lim_{p'=s_0} Q_2(\xi, \eta)_0 =$$

$$= \frac{1}{2}(\Gamma_1 + b\,\Gamma_2)\cos(n_0 x) = \frac{1}{2}\Gamma_3 \cos(n_0 x);$$

et, d'après l'équation (8),

$$\Gamma_3 = 0.$$

De cela on déduit, comme au § 5,

(sur la courbe C) $$\varphi_3(s) = \psi_3(s) = 0,$$

c'est à dire:

$$\varphi_1(s) + b\,\varphi_2(s) = 0, \qquad \psi_1(s) + b\,\psi_2(s) = 0.$$

On a donc le résultat suivant: *une solution quelconque $\varphi_2(s)$, $\psi_2(s)$ des équations* (5) *est toujours égale à la solution $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ multipliée par une même convenable constante;* en d'autres termes, si l'on considère comme différentes entre eux, ces solutions qui sont linéairement indépendantes, on peut dire que *les équations* (5) *admettent une solution seulement différente de zéro.*

7. À cause de ce résultat et en vertu d'un théorème sur les équations fonctionnelles[1], on a: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ des équations fonctionnelles* (4), *c'est que les fonctions données $u(s)$, $v(s)$ vérifient la condition:*

[1] Fredholm; l. c., § 2, n. 9

$$0=\int_C \{u(s)\varphi'_1(s)+v(s)\psi'_1(s)\}\,ds=\int_C \{u(s)\cos(ny)-v(s)\cos(nx)\}\,ds=$$

$$=\int_C \{u(s)\cos(sx)+v(s)\cos(sy)\}\,ds.$$

Or, en vertu de l'hypothèse (3), cette condition est vérifiée; on en conclut, par suite, que *les équations* (4) *admettent une solution* $\varphi(s)$, $\psi(s)$.

Cela posé, formons avec cette solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ les fonctions:

$$(10)\qquad \begin{cases} u(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{X'_s\varphi(s)+Y'_s\psi(s)\}\,ds, \\[2ex] v(\xi,\eta)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{X''_s\varphi(s)+Y''_s\psi(s)\}\,ds. \end{cases}$$

On vérifie tout de suite que ces fonctions satisfont aux équations (1). En vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:o), des formules (9), (9)' du Chapitre II et des équations (4), on a ensuite:

$$\lim_{p=s_0} u(\xi,\eta)=\varphi(s_0)-\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s,s_0)\varphi(s)+\beta(s,s_0)\psi(s)\}\,ds=u(s_0),$$

$$\lim_{p=s_0} v(\xi,\eta)=\psi(s_0)-\frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi(s)+\beta'(s,s_0)\psi(s)\}\,ds=v(s_0).$$

Par conséquent, nous pouvons énoncer le résultat suivant: *les fonctions* $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$, *données par les formules* (10), *considérées dans l'aire finie* σ, *satisfont aux équations* (1), *et, sur* C, *elles se réduisent aux fonctions données* $u(s)$, $v(s)$.

Ainsi nous avons résolu le problème de l'intégration des équations (5)' du Chapitre I (*problème intérieur*).

Résolution du problème extérieur.

8. *Soient données deux fonctions quelconques* $u(s)$, $v(s)$, *des points de* C, *finies et continues.* Envisageons le système d'équations fonctionnelles:

$$
(11)\quad \begin{cases} u(s_0) = \varphi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\}\, ds, \\[2ex] v(s_0) = \psi(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\}\, ds; \end{cases}
$$

et le système d'équations homogènes:

$$
(12)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta(s, s_0)\psi_1(s)\}\, ds, \\[2ex] 0 = \psi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\psi_1(s)\}\, ds. \end{cases}
$$

Les équations (12) *admettent les trois solutions différentes de zéro:*

$$
(13)\qquad \varphi_{11} = x(s), \quad \psi_{11} = y(s); \quad \varphi_{12} = k, \quad \psi_{12} = 0; \quad \varphi_{13} = 0, \quad \psi_{13} = j,
$$

où $x(s)$, $y(s)$ *désignent les coordonnées variables des points de* C, *et où* k, j *désignent deux constantes arbitraires.*

En effet, les formules (22) du Chapitre I nous donnent:

$$
\xi' = x(s_0) = \lim_{p=s_0}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C (xX'_s + yY'_s)\, ds\right\},
$$

$$
\eta' = y(s_0) = \lim_{p=s_0}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_C (xX''_s + yY''_s) ds\right\};
$$

et, en vertu des (9), (9)' du Chapitre II, on aura:

$$
x(s_0) = \frac{1}{2}\left[x(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{x(s)\,\alpha(s, s_0) + y(s)\,\beta(s, s_0)\}\, ds\right],
$$

$$
y(s_0) = \frac{1}{2}\left[y(s_0) - \frac{1}{\pi}\int_C \{x(s)\,\alpha'(s, s_0) + y(s)\,\beta'(s, s_0)\}\, ds\right],
$$

ou bien:

$$
0 = x(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)x(s) + \beta(s, s_0)y(s)\}\, ds,
$$

$$
0 = y(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)x(s) + \beta'(s, s_0)y(s)\}\, ds.
$$

De même, des (23) du Chapitre I, l'on aura:

$$0 = k + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)k + \beta(s, s_0)0\}\, ds,$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)k + \beta'(s, s_0)0\}\, ds;$$

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)0 + \beta(s, s_0)j\}\, ds,$$

$$0 = j + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)0 + \beta'(s, s_0)j\}\, ds.$$

La proposition est donc établie.

9. Maintenant nous voulons démontrer que le système d'équations homogènes (12) n'admette d'autres solutions, que les trois solutions signalées φ_{11}, ψ_{11}; φ_{12}, ψ_{12}; φ_{13}, ψ_{13}. En d'autres termes, nous voulons démontrer qu'*une solution quelconque du système d'équations fonctionnelles* (12) *a toujours la forme:*

$$h'x(s) + k', \qquad h'y(s) + j',$$

où h', k', j' *sont des constantes.*

En effet, soit $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ une solution des équations (12). Formons avec les fonctions $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$, les expressions:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_C \{X'_s\, \varphi_1(s) + Y'_s\, \psi_1(s)\}\, ds,$$

$$\Psi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\int_C \{X''_s \varphi_1(s) + Y''_s \psi_1(s)\}\, ds.$$

En vertu des (9), (9)' du Chapitre II et des équations (12), l'on a:

$$(14)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=s_0} \Phi_1(\xi, \eta) = -\varphi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha\,(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta\,(s, s_0)\,\psi_1(s)\} ds = -2\,\varphi_1(s_0), \\[2ex] \lim\limits_{p=s_0} \Psi_1(\xi, \eta) = -\psi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s, s_0)\,\psi_1(s)\} ds = -2\,\psi_1(s_0); \end{cases}$$

$$(14)' \quad \begin{cases} \lim\limits_{p'=s_0} \Phi_1(\xi,\eta) = \varphi_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta(s,s_0)\psi_1(s)\}\,ds = 0, \\ \lim\limits_{p'=s_0} \Psi_1(\xi,\eta) = \psi_1(s) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi_1(s) + \beta'(s,s_0)\psi_1(s)\}\,ds = 0. \end{cases}$$

Les expressions $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$, considérées comme fonctions des points (ξ,η) de l'aire infinie σ', satisfont aux équations (1) et aux points à l'infini du plan de C se comportent comme la fonction $\frac{1}{\varrho}$; par conséquent on aura, à cause des $(14)'$ et du résultat 3°, établi au § 5 du Chapitre I,

(dans l'aire σ') $\qquad \Phi_1(\xi,\eta) = \Psi_1(\xi,\eta) = 0.$

De cela l'on déduit, en introduisant, comme aux §§ 3 et 4, les expressions $\Theta_1(\xi,\eta)$, $\Gamma_1(\xi,\eta)$; $P_1(\xi,\eta)_0$, $Q_1(\xi,\eta)_0$; $X_s^{(1)}$, $Y_s^{(1)}$; $\overline{X}_s^{(1)}$, $\overline{Y}_s^{(1)}$, et en raisonnant comme au § 4,

$$X_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} P_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad Y_s^{(1)} = \lim_{p'=s_0} Q_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x),$$

où Γ_1 est une constante; et, par conséquent,

$$(15) \quad X_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} P_1(\xi,\eta)_0 = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 y), \qquad Y_s^{(1)} = \lim_{p=s_0} Q_1(\xi,\eta)_0 = \frac{1}{2}\Gamma_1 \cos(n_0 x).$$

Remarquons que les fonctions $\Phi_1(\xi,\eta)$, $\Psi_1(\xi,\eta)$, considérées dans l'aire finie σ, satisfont aux équations (1), et sur la courbe C satisfont aux équations (15). Alors, en vertu du résultat 2°, établi au § 4 du Chapitre I, l'on aura:

(dans l'aire σ) $\qquad \Phi_1(\xi,\eta) = h\xi + k, \qquad \Psi_1(\xi,\eta) = h\eta + j,$

où h, k, j sont des constantes; et, par conséquent, à cause des (14),

$$\varphi_1(s) = -\frac{1}{2}\{hx(s) + k\}, \qquad \psi_1(s) = -\frac{1}{2}\{hy(s) + j\}.$$

En posant:

$$h' = -\frac{1}{2}h, \qquad k' = -\frac{1}{2}k, \qquad j' = -\frac{1}{2}j,$$

on peut écrire encore:

$$\varphi_1(s) = h'x(s) + k', \qquad \psi_1(s) = h'y(s) + j'.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

10. Ceci posé, écrivons les équations fonctionnelles:

$$(12)' \quad \begin{cases} 0 = \varphi'_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \\[2ex] 0 = \psi'_1(s_0) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_C \{\alpha'(s_0, s)\varphi'_1(s) + \beta'(s_0, s)\psi'_1(s)\} ds, \end{cases}$$

associées aux équations (12), et observons que les théorèmes 1:0), 2:0) et 3:0), énoncés au § 1 pour les équations fonctionnelles (4), (5), (5)', vont aussi pour les équations analogues (11), (12), (12)'. Nous aurons alors: *les équations* (12)' *admettent trois solutions différentes de zéro, et trois seulement.*

Ajoutons que, en vertu d'un théorème de M. Plemelj,[1] *on peut toujours déterminer ces trois solutions* $\varphi'_{11}(s)$, $\psi'_{11}(s)$; $\varphi'_{12}(s)$, $\psi'_{12}(s)$; $\varphi'_{13}(s)$, $\psi'_{13}(s)$ *de manière à satisfaire aux conditions:*[2]

$$(16) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{11}(s) + y(s)\psi'_{11}(s)\} ds = 1, & \displaystyle\int_C \varphi'_{11}(s) ds = 0, & \displaystyle\int_C \psi'_{11}(s) ds = 0; \\[2ex] \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{12}(s) + y(s)\psi'_{12}(s)\} ds = 0, & \displaystyle\int_C \varphi'_{12}(s) ds = 1, & \displaystyle\int_C \psi'_{12}(s) ds = 0; \\[2ex] \displaystyle\int_C \{x(s)\varphi'_{13}(s) + y(s)\psi'_{13}(s)\} ds = 0, & \displaystyle\int_C \varphi'_{13}(s) ds = 0, & \displaystyle\int_C \psi'_{13}(s) ds = 1. \end{cases}$$

Alors, à cause d'un théorème sur les équations fonctionnelles,[3] dont nous avons fait usage au § 7, on aura: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution* $\varphi(s)$, $\psi(s)$ *des équations* (11), *c'est que les fonctions données* $u(s)$, $v(s)$ *vérifient les trois conditions:*

$$(17) \quad \left\{ \int_C \{u(s)\varphi'_{11}(s) + v(s)\psi'_{11}(s)\} ds = 0. \right.$$

[1] *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung* (Monatshefte für Mathematik und Physik; XV. Jahrg.; Seite 115).

[2] On peut aussi déduire ce résultat indépendamment du théorème de M. Plemelj.

[3] Fredholm; l. c., § 2, n. 9.

$$
(17)\qquad \begin{cases} \int\limits_C \{u(s)\varphi'_{12}(s) + v(s)\psi'_{12}(s)\}\,ds = 0, \\ \int\limits_C \{u(s)\varphi'_{13}(s) + v(s)\psi'_{13}(s)\}\,ds = 0. \end{cases}
$$

Si l'on suppose auparavant que les fonctions $u(s)$, $v(s)$ vérifient les conditions (17), on aura que les équations (11) admettent une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$. Formons avec cette solution les expressions:

$$
(18)\qquad \begin{cases} u(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_C \{X'_s\,\varphi(s) + Y'_s\,\psi(s)\}\,ds, \\ v(\xi, \eta) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_C \{X''_s\varphi(s) + Y''_s\psi(s)\}\,ds. \end{cases}
$$

Celles-ci, considérées dans l'aire σ', satisfont aux équations (1); et, en vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:0) et des formules (9), (9)' du Chapitre précédent, elles nous donnent:

$$
\lim_{p'=s_0} u(\xi, \eta) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha\,(s, s_0)\varphi(s) + \beta\,(s, s_0)\psi(s)\}\,ds = u(s_0),
$$

$$
\lim_{p'=s_0} v(\xi, \eta) = \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\}\,ds = v(s_0).
$$

On aura donc: *les fonctions $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ des points de l'aire infinie σ', données par les formules* (18), *satisfont aux équations* (1), *et, sur C, elles se réduisent aux fonctions données $u(s)$, $v(s)$.* Ainsi nous avons résolu le problème de l'intégration des équations, que l'on obtient des équations (5)' du Chapitre I en remplaçant σ par σ', dans le cas particulier où les valeurs des fonctions inconnues vérifient les conditions (17).

11. Dans le cas où les fonctions données sur C ne vérifient pas les conditions (17), déterminons trois constantes h', k', j' de manière que, ayant posé:

$$
(19)\qquad \bar{u}(s) = u(s) - h'x(s) - k', \qquad \bar{v}(s) = v(s) - h'y(s) - j',
$$

en résulte:

$$(17)' \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{11}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{11}(s)\}\,ds, \\ 0 &= \int_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{12}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{12}(s)\}\,ds, \\ 0 &= \int_C \{\bar{u}(s)\varphi'_{13}(s) + \bar{v}(s)\psi'_{13}(s)\}\,ds. \end{aligned} \right.$$

Faisant usage des (16) et des (19), ces équations deviennent:

$$(17)'' \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_C \{u(s)\varphi'_{11}(s) + v(s)\psi'_{11}(s)\}\,ds - h', \\ 0 &= \int_C \{u(s)\varphi'_{12}(s) + v(s)\psi'_{12}(s)\}\,ds - k', \\ 0 &= \int_C \{u(s)\varphi'_{13}(s) + v(s)\psi'_{13}(s)\}\,ds - j'. \end{aligned} \right.$$

Ainsi déterminées les constantes h', k', j', considérons les équations fonctionnelles:

$$(11)' \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{u}(s_0) &= \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha(s, s_0)\varphi(s) + \beta(s, s_0)\psi(s)\}\,ds, \\ \bar{v}(s_0) &= \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s, s_0)\varphi(s) + \beta'(s, s_0)\psi(s)\}\,ds. \end{aligned} \right.$$

En vertu des $(17)''$, la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe une solution $\varphi(s)$, $\psi(s)$ des équations fonctionnelles précédentes $(11)'$, est vérifiée.

Formons, avec cette solution, les fonctions:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= h'\xi + k' + \frac{1}{\pi}\int_C \{X'_s\,\varphi(s) + Y'_s\,\psi(s)\}\,ds, \\ v(\xi, \eta) &= h'\eta + j' + \frac{1}{\pi}\int_C \{X''_s\varphi(s) + Y''_s\psi(s)\}\,ds. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci satisfont partout aux équations (1); et, en vertu de la continuité des fonctions $\varphi(s)$, $\psi(s)$ (théorème 1:0), en faisant usage des formules (9), (9)' du Chapitre II et des équations (11)', (19), elles nous donnent:

$$\lim_{p'=s_0} u(\xi,\eta) = h'x(s_0) + k' + \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha\,(s,s_0)\varphi(s) + \beta\,(s,s_0)\psi(s)\}\,ds =$$

$$= h'x(s_0) + k' + \bar{u}(s_0) = u(s_0),$$

$$\lim_{p'=s_0} v(\xi,\eta) = h'y(s_0) + j' + \psi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \{\alpha'(s,s_0)\varphi(s) + \beta'(s,s_0)\psi(s)\}\,ds =$$

$$= h'y(s_0) + j' + \bar{v}(s_0) = v(s_0).$$

On aura donc: *les fonctions* $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$ *des points de l'aire infinie* σ', *données par les formules* (20), *satisfont aux équations* (1), *et, sur* C, *elles se réduisent aux fonctions données* $u(s)$, $v(s)$. Ainsi nous avons résolu, en toute sa généralité, le problème de l'intégration des équations, que l'on obtient des équations (5)' du Chapitre I en remplaçant σ par σ' (*problème extérieur*).

CHAPITRE IV.

Problème intérieur pour le cas d'un contour rectangulaire.

1. Dans le cas où le contour C est rectangulaire nous ne pouvons pas affirmer que la démonstration de l'existence des intégrales des équations (5)' du Chapitre I (résolution du *problème intérieur*), que nous avons donnée au Chapitre précédent, soit acceptable; puisque, dans ce cas, les expressions (2), du Chapitre III, ont des points de singularité. En effet, elles, en chaque sommet du rectangle, ou prennent la valeur zéro, ou se comportent comme la fonction $\frac{1}{r'}$, suivant que les variables s, s_0 s'approchent des valeurs correspondantes à ce sommet en variant sur le même côté ou sur deux côtés consécutifs.

Nous résoudrons ici le problème intérieur relatif au rectangle, en utilisant les idées qui ont amené Mathieu (*Théorie de l'élasticité des corps solides;* seconde partie, Chapitre X) à résoudre un problème d'élasticité relatif au prisme rectangle; et, comme on le verra, nous ferons aussi souvent usage des mêmes calculs de Mathieu.

Écrivons les équations $(5)'$ du Chapitre I sous la forme:

$$(1) \quad \text{(dans l'aire } \sigma) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \Delta^2 \theta = \Delta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0;$$

$$(2) \quad \text{(sur le contour } C) \qquad u = u(s), \qquad v = v(s);$$

et supposons que *les fonctions données* $u(s)$, $v(s)$, *des points de* C, *soient finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, exception faite, au surplus, de la continuité de ces dérivées pour les sommets du rectangle* (voir, à ce propos, la *Remarque I* au § 3 du Chapitre I).

2. Soient:

$$x = \frac{a}{2}, \quad x = -\frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad y = -\frac{b}{2}$$

les équations des lignes droites, qui contiennent les côtés du rectangle.

La condition (7) du Chapitre I, qui doit être nécessairement remplie par les fonctions données $u(s)$, $v(s)$, divient:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(\frac{a}{2}, y\right) dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u\left(x, \frac{b}{2}\right) dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(-\frac{a}{2}, y\right) dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u\left(x, -\frac{b}{2}\right) dx = 0.$$

Déterminons une constante h de manière qu'on ait:

$$(3) \qquad \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[v\left(\frac{a}{2}, y\right) + h \right] dy = 0;$$

et remplaçons les (2) par les autres:

$$(2)' \quad \text{(sur le contour } C) \qquad u = u(s) + h, \qquad v = v(s) + h.$$

Les conditions $(2)'$ coincident avec les (2) si $h = 0$, c'est à dire, si l'on a:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} v\left(\frac{a}{2}, y\right) dy = 0.$$

Remarquons que, lorsqu'on a effectué, d'une manière quelconque, l'intégration des équations (1), (2)$'$, on aura aussitôt les intégrales des équations proposées (1), (2); de sorte que nous nous bornerons à l'integration des équations (1), (2)$'$.

Remarquons encore que, en vertu de la linéarité des équations (1), (2)$'$, ce dernier problème peut se partager en les deux suivants:

1° intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(2)'' \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = v(s) + h, \quad u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) \\ \qquad\qquad v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0; \end{cases}$$

2° intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(2)''' \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \text{(dans les autres points de } C\text{)} \ v = v(s) + h, \\ \qquad \text{(sur tout le contour } C\text{)} \ u = u(s) + h. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que ce dernier problème se divise en sept autres et tous semblables au premier; par conséquent le problème proposé peut se partager en huit problèmes de la nature du 1°. Mais il convient partager encore ce dernier problème en deux autres: l'un, A, intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(4) \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \quad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = \\ \qquad = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0; \end{cases}$$

l'autre, B, intégration des équations (1) avec les conditions au contour C:

$$(5) \quad \begin{cases} v\left(\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \quad v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = -f(y), \quad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \\ \qquad = u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = u\left(x, \frac{b}{2}\right) = u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

où l'on a fait:

$$f(y) = \frac{1}{2}\{v(s) + h\}.$$

En ajoutant les deux solutions des deux problèmes A et B, on obtiendra celle du problème 1°. Nous allons résoudre successivement les deux problèmes A et B.

Résolution du problème A. — Introduction de séries.

3. Pour ne pas trop compliquer la question, nous supposerons que $f(y)$ est une fonction impaire; mais la solution s'obtiendrait exactement de la même manière si la fonction $f(y)$ était paire; et $f(y)$, dans tous les cas, peut se partager en une fonction paire et une fonction impaire.

Ceci posé, supposons que la fonction impaire $f(y)$ soit développable en *série de Fourier* uniformément convergente, et que soit aussi uniformément convergente la série des dérivées du premier ordre. Alors on pourra écrire:

$$f(y) = \Sigma_n R_n \sin ny, \qquad f'(y) = \Sigma_n n R_n \cos ny,$$

avec

$$n = \frac{2 q \pi}{b},$$

q étant les nombres entiers positifs 1, 2, 3, 4, ... et le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les valeurs de q.

En posant:

$$n R_n = A_n,$$

nous aurons:

$$f(y) = \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny, \tag{6}$$

et la série:

$$f'(y) = \Sigma_n A_n \cos ny$$

sera uniformément convergente.

Introduisons les notations:

$$\sinh x = \mathfrak{S}(x), \qquad \cosh x = E(x),$$

et posons:

$$m = \frac{2 p \pi}{a},$$

$$\left\{ \begin{aligned} F &= x \Sigma_n \frac{1}{n} B_n \mathfrak{S}(nx) \cos ny + \Sigma_n H_n E(nx) \cos ny + \\ &\qquad + y \Sigma_m \frac{1}{m} \mathfrak{B}_m \mathfrak{S}(my) \cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m E(my) \cos mx \end{aligned} \right. \tag{7}$$

où p prend toutes les valeurs entières et positives 1, 2, 3, 4, ..., et où les signes sommatoires Σ s'étendent à toutes les valeurs de p ou de q. Les coefficients B_n, H_n, $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{H}_m$ sont supposés, pour le moment, indéterminés.

Si l'on admet la légitimité des dérivations terme à terme des séries qui composent F, on pourra écrire:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial x} = \Sigma_n B_n \left\{\frac{1}{n}\mathfrak{E}(nx) + xE(nx)\right\}\cos ny + \Sigma_n H_n n\,\mathfrak{E}(nx)\cos ny - \\ &\qquad - \Sigma_m \mathfrak{B}_m y\,\mathfrak{E}(my)\sin mx - \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,E(my)\sin mx, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial y} = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{\frac{1}{m}\mathfrak{E}(my) + yE(my)\right\}\cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,\mathfrak{E}(my)\cos mx - \\ &\qquad - \Sigma_n B_n x\,\mathfrak{E}(nx)\sin ny - \Sigma_n H_n n\,E(nx)\sin ny. \end{aligned}\right.$$

Élimination des coefficients H_n et $\mathfrak{H}_m$.

4. Ayant égard aux conditions:

$$u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0,$$

et aux relations:

$$\sin\frac{ma}{2} = 0, \qquad \sin\frac{nb}{2} = 0,$$

les formules (8) nous donnent:

$$\Sigma_n B_n \left\{\frac{1}{n}\,\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{a}{2}E\left(\frac{na}{2}\right)\right\}\cos ny + \Sigma_n H_n\, n\,\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)\cos ny = 0,$$

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{\frac{1}{m}\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{b}{2}E\left(\frac{mb}{2}\right)\right\}\cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\cos mx = 0,$$

d'où l'on obtient:

$$H_n = -B_n\left\{\frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n}\frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right\}, \qquad \mathfrak{H}_m = -\mathfrak{B}_m\left\{\frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m}\frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right\}.$$

Substituons, dans les formules (7), (8), les expressions précédentes de H_n et de $\mathfrak{H}_m$, et nous obtiendrons, en simplifiant,

$$(7)' \quad F = \Sigma_n B_n \left[\frac{x}{n} \mathfrak{E}(nx) - \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} E(nx) \right] \cos ny +$$
$$+ \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[\frac{y}{m} \mathfrak{E}(my) - \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \cos mx,$$

$$(8)' \quad \begin{cases} u = \Sigma_n B_n \left[x E(nx) - \dfrac{a}{2} \dfrac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \mathfrak{E}(nx) \right] \cos ny - \\ \qquad - \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y \mathfrak{E}(my) - \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{b}{2} \dfrac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \sin mx, \\ v = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y E(my) - \dfrac{b}{2} \dfrac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \cos mx - \\ \qquad - \Sigma_n B_n \left[x \mathfrak{E}(nx) - \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{a}{2} \dfrac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} E(nx) \right] \sin ny. \end{cases}$$

On vérifie, aisément, que les fonctions précédentes u, v satisfont aux conditions:

$$u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, en résumé, les fonctions u, v, données par les équations $(8)'$, satisfont aux conditions:

$$(9) \qquad u\left(\frac{a}{2}, y\right) = u\left(-\frac{a}{2}, y\right) = v\left(x, \frac{b}{2}\right) = v\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Détermination des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$.

5. À cause des conditions:

$$v\left(\frac{a}{2},\ y\right) = f(y), \qquad u\left(x,\ \frac{b}{2}\right) = 0 \tag{10}$$

et de l'équation:

$$E^2(x) - \mathfrak{E}^2(x) = 1,$$

on aura:

$$(10)' \left\{ \begin{aligned} \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny &= \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y\, E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \cos \frac{ma}{2} + \\ &\quad + \Sigma_n B_n \frac{1}{n} \left[E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{na}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \right] \sin ny, \\ 0 &= \Sigma_n B_n \left[x\, E(nx) - \frac{a}{2} \frac{E\left(\frac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)} \mathfrak{E}(nx) \right] \cos \frac{nb}{2} + \\ &\quad + \Sigma_m \mathfrak{B}_m \frac{1}{m} \left[E\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{mb}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right] \sin mx. \end{aligned} \right.$$

Multiplions la première de ces équations par $\sin ny . dy$ et intégrons de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$. Si l'on admet la légitimité des intégrations terme à terme des séries, que nous voyons dans les formules $(10)'$, eu égard aux formules:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin^2 ny\, dy = \frac{b}{2}, \qquad \int \mathfrak{E}(my) \sin ny\, dy = \frac{m\, E(my) \sin ny - n\, \mathfrak{E}(my) \cos ny}{m^2 + n^2},$$

$$\int y\, E(my) \sin ny\, dy = y \frac{m\, \mathfrak{E}(my) \sin ny - n\, E(my) \cos ny}{m^2 + n^2} + \\ + \frac{(n^2 - m^2)\, E(my) \sin ny + 2mn\, \mathfrak{E}(my) \cos ny}{(m^2 + n^2)^2},$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathfrak{E}(my)\sin ny\,dy = -\frac{2n\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2}\cos\frac{nb}{2}.$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} yE(my)\sin ny\,dy = \left[-\frac{nbE\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2} + \frac{4mn\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{(m^2+n^2)^2}\right]\cos\frac{nb}{2},$$

on obtiendra:

$$\frac{b}{2n}A_n - \frac{b}{2n}B_n\left[E\left(\frac{na}{2}\right)+\frac{na}{2}\,\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right] -$$

$$-\Sigma_m \mathfrak{B}_m\left[\frac{nbE\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2} - \frac{4mn\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}{(m^2+n^2)^2} - \frac{nbE\left(\frac{mb}{2}\right)}{m^2+n^2}\right]\cos\frac{nb}{2}\cos\frac{ma}{2},$$

ou bien:

$$(11)\quad B_n b\left[E\left(\frac{na}{2}\right)+\frac{na}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}\right] = bA_n - 8\cos\frac{nb}{2}\Sigma_m \mathfrak{B}_m\frac{n^2m}{(n^2+m^2)^2}\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\cos\frac{ma}{2}.$$

On déduit de même de la seconde des équations (10)':

$$(12)\quad \mathfrak{B}_m a\left[E\left(\frac{mb}{2}\right)+\frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right] = -8\cos\frac{ma}{2}\Sigma_n B_n\frac{m^2n}{(m^2+n^2)^2}\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)\cos\frac{nb}{2}.$$

Remarque. — Si l'on multiplie la première des équations (10)' par dy et qu'on intègre de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$, on trouvera, en conformité de la supposition (3), l'identité:

$$0 = 0.$$

On déduira la même identité de la seconde des équations (10)'.

6. Observons que nous pouvons obtenir les équations (11), (12), en faisant $\lambda = 0$, $\mu = 1$ dans les équations à la page 149 de l'ouvrage, déjà cité, de Mathieu; par conséquent, nous pourrons déduire les valeurs de nos coefficients B_n et $\mathfrak{B}_m$, faisant $\lambda = 0$, $\mu = 1$ dans les expressions, trouvées par Mathieu (loc. cit. page 154), pour les valeurs des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$, qu'il a aussi introduit. Nous ne rapportons pas ici les expressions qui donnent les valeurs de nos coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$; parce qu'elles contiennent des notations, qu'il faudrait expliquer et qui,

d'ailleurs, sont étudiées en tous leurs détails dans l'ouvrage de Mathieu. Dans cet ouvrage sont aussi données (loc. cit. pages 161, 162, 163) des valeurs numériques (avec cinq décimals), qui servent à calculer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans le cas d'un carré $(a = b)$.

Convergence des séries qui représentent F, u, v.

7. Les expressions $(8)'$ de u, v sont formées au moyens des séries suivantes:

$$(13)\quad \begin{cases} \Sigma_n B_n E(nx)\cos ny, \quad \Sigma_m \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my)\sin mx, \\ \qquad \Sigma_n B_n \mathfrak{E}(nx)\sin ny, \quad \Sigma_n B_n \dfrac{E\left(\dfrac{na}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\dfrac{na}{2}\right)}\mathfrak{E}(nx)\cos ny, \ldots \end{cases}$$

Ces séries sont de la même nature que la série:

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m E(my)\cos mx,$$

qui a été étudiée par Mathieu (pages 157, 158); et l'on pourra démontrer leur convergence uniforme, et, par conséquent, la légitimité des intégrations terme à terme, admise au § 5, faisant usage des considérations de Mathieu.

À fortior en résulte la convergence uniforme des séries, qui forment l'expression $(7)'$ de F, et la légitimité des dérivations, admise au § 3.

Lemme.

8. *Soit une série uniformément convergente:*

$$(14)\qquad w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

de fonctions harmoniques dans l'aire σ, limitée par un contour C. S'il existe la onction de Green pour le contour C, on pourra appliquer à cette série la dérivation terme à terme en tous les points de l'intérieur de l'aire σ.

En effet, désignons par G la *fonction de Green* relative à la courbe C.

On aura:

$$w_i = \int_C w_i \frac{dG}{dn} ds, \quad w = \int_C w \frac{dG}{dn} ds;$$

et, par conséquent,[1]

[1] Pour la légitimité des dérivations, voir: Lauricella; *Sull' integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi*, §§ 1, 2 et 3 (Annali di Matematica, t. XI, s. 3a).

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = \int\limits_C w_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG}{dn} ds, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \int\limits_C w \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG}{dn} ds.$$

Alors, en vertu de l'intégrabilité terme à terme de la série (14), on pourra écrire, pour un point quelconque intérieur à σ,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int\limits_C w \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG}{dn} ds = \int\limits_C \sum_1^{\infty}{}_i\, w_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG}{dn} ds = \sum_1^{\infty}{}_i \int\limits_C w_i \frac{\partial}{\partial x} \frac{dG}{dn} ds = \sum_1^{\infty}{}_i \frac{\partial w_i}{\partial x}.$$

De même l'on aura:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_1^{\infty}{}_i \frac{\partial w_i}{\partial y}.$$

Le lemme est donc établi.

Vérifications.

9. Ce lemme est valable en particulier pour les séries (13), qui forment les fonctions u, v; et alors, puisque l'on a (§§ 3 et 7):

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y},$$

en résultera, pour un point quelconque de l'intérieur de σ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \Delta^2 F = 2 \Sigma_n B_n E(nx) \cos ny + 2 \Sigma_m \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my) \cos mx;$$

et encore:

(dans l'aire σ) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Delta^2 \theta = 0.$$

Observons, enfin, que les expressions (8)′ de u et de v, qui vérifient les conditions (9), (10), vérifient aussi, en vertu des équations (10)′, les autres conditions:

$$v\left(-\frac{a}{2}, y\right) = f(y), \quad u\left(x, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

En concluant, *les fonctions u, v, données par les formules* (8)′, *satisfont aux équations* (1) *et aux conditions* (4) *au contour C;* par conséquent, *elles résoudrent le problème A.*

Remarquons que la fonction F, donnée par la formule (7)′, représente, à une constante près, la solution des équations (1)′ du Chapitre I, qui correspondent au problème A.

Résolution du problème B. — Introduction de séries.

10. Faisons sur la fonction $f(y)$ les mêmes hypothèses que nous avons faites au § 3. On aura alors:

$$f(y) = \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin n y,$$

avec

$$n = \frac{2 q \pi}{b}, \quad (q = 1, 2, 3, 4, \ldots);$$

et la série

$$f'(y) = \Sigma_n A_n \cos n y$$

sera uniformément convergente.

Posons:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} F = D x + \frac{1}{3} D' x^3 + x \Sigma_n \frac{1}{n} B_n E(nx) \cos ny + \Sigma_n H_n \mathfrak{E}(nx) \cos ny + \\ + y \Sigma_m \frac{1}{m} \mathfrak{B}_m \mathfrak{E}(my) \sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m E(my) \sin mx, \end{aligned} \right.$$

avec

$$m = \frac{(2j+1)\pi}{a}, \quad (j = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Si l'on admet la légitimité des dérivations terme à terme des séries, qui composent la fonction F, nous pourrons écrire:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} u = \frac{\partial F}{\partial x} = D + D' x^2 + \Sigma_n B_n \left\{ \frac{1}{n} E(nx) + x \mathfrak{E}(nx) \right\} \cos ny + \\ + \Sigma_n H_n n E(nx) \cos ny + \Sigma_m \mathfrak{B}_m y \mathfrak{E}(my) \cos mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m E(my) \cos mx, \\ v = \frac{\partial F}{\partial y} = \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{ \frac{1}{m} \mathfrak{E}(my) + y E(my) \right\} \sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m \mathfrak{E}(my) \sin mx \\ - \Sigma_n B_n x E(nx) \sin ny - \Sigma_n H_n n \mathfrak{E}(nx) \sin ny. \end{aligned} \right.$$

Élimination des coefficients H_n et $\mathfrak{H}_m$.

11. Faisant usage des conditions:

$$u\left(\frac{a}{2}, y\right) = 0, \qquad v\left(x, \frac{b}{2}\right) = 0,$$

et des relations:

$$\cos\frac{ma}{2} = 0, \qquad \sin\frac{nb}{2} = 0,$$

on aura, des expressions (16) de u et de v,

$$D + \frac{1}{4} D' a^2 + \Sigma_n B_n \left\{ \frac{1}{n} E\left(\frac{na}{2}\right) + \frac{a}{2} \mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right) \right\} \cos ny + \Sigma_n H_n n E\left(\frac{na}{2}\right) \cos ny = 0,$$

$$\Sigma_m \mathfrak{B}_m \left\{ \frac{1}{m} \mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{b}{2} E\left(\frac{mb}{2}\right) \right\} \sin mx + \Sigma_m \mathfrak{H}_m m \mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right) \sin mx = 0,$$

d'où l'on tire:

$$D' = -\frac{4}{a^2} D, \qquad H_n = -B_n \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n} \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right\}, \qquad \mathfrak{H}_m = -\mathfrak{B}_m \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\}.$$

Substituons les expressions précédentes de H_n, $\mathfrak{H}_m$ dans les formules (15), (16), et nous obtiendrons, en simplifiant,

$$(15)' \quad F = Dx - \frac{4}{3a^2} Dx^3 + \\ + \Sigma_n B_n \left[\frac{x}{n} E(nx) - \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{a}{2n} \cdot \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} \mathfrak{E}(nx) \right] \cos ny + \\ + \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[\frac{y}{m} \mathfrak{E}(my) - \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{b}{2m} \cdot \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \sin mx,$$

$$(16)' \quad \left\{ \begin{aligned} u = D - \frac{4}{a^2} Dx^2 + \Sigma_n B_n \left[x\,\mathfrak{E}(nx) - \frac{a}{2} \cdot \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} E(nx) \right] \cos ny + \\ + \Sigma_m \mathfrak{B}_m \left[y\,\mathfrak{E}(my) - \left\{ \frac{1}{m} + \frac{b}{2} \cdot \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right\} E(my) \right] \cos mx, \end{aligned} \right.$$

$$(16)' \quad \left\{ \begin{aligned} v = \Sigma_m \mathfrak{B}_m & \left[y\,E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \sin mx - \\ & - \Sigma_n B_n \left[x\,E(nx) - \left\{ \frac{1}{n} + \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right\} \mathfrak{E}(nx) \right] \sin ny. \end{aligned} \right.$$

On vérifie, aisément, que les expressions précédentes de u et de v satisfont aux conditions:

$$u\left(-\frac{a}{2},\, y\right) = 0, \qquad v\left(x,\, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

En résumé, les fonctions u, v, données par les équations $(16)'$, vérifient les conditions:

$$(17) \qquad u\left(\frac{a}{2},\, y\right) = u\left(-\frac{a}{2},\, y\right) = v\left(x,\, \frac{b}{2}\right) = v\left(x,\, -\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Détermination des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$.

12. Des conditions:

$$(18) \qquad v\left(\frac{a}{2},\, y\right) = f(y), \qquad u\left(x,\, \frac{b}{2}\right) = 0$$

on déduit, faisant usage des expressions $(16)'$ de u et de v,

$$(18)' \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_n \frac{A_n}{n} \sin ny = \Sigma_m \mathfrak{B}_m & \left[y\,E(my) - \frac{b}{2} \frac{E\left(\frac{mb}{2}\right)}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \mathfrak{E}(my) \right] \sin \frac{ma}{2} + \\ & + \Sigma_n B_n \frac{1}{n} \left[\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right) - \frac{na}{2} \cdot \frac{1}{E\left(\frac{na}{2}\right)} \right] \sin ny, \\ D\left(\frac{4}{a^2} x^2 - 1\right) = \Sigma_n B_n & \left[x\,\mathfrak{E}(nx) - \frac{a}{2} \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)} E(nx) \right] \cos \frac{nb}{2} - \\ & - \Sigma_m \mathfrak{B}_m \frac{1}{m} \left[E\left(\frac{mb}{2}\right) + \frac{mb}{2} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)} \right] \cos mx. \end{aligned} \right.$$

Si nous opérons sur ces équations, comme l'on a opéré au § 5 sur les équations $(10)'$, nous obtiendrons:

$$(19)\quad B_n b\left[\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)-\frac{na}{2}\cdot\frac{1}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\right]=bA_n-8\cos\frac{nb}{2}\,\Sigma_m\mathfrak{B}_m\frac{mn^2}{(m^2+n^2)^2}\,\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)\sin\frac{ma}{2},$$

$$\begin{aligned}(20)\quad \mathfrak{B}_m a\left[E\left(\frac{mb}{2}\right)+\frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right]-\frac{32}{a^2}\cdot\frac{D}{m^2}\sin\frac{ma}{2}\,-\\ =-8\sin\frac{ma}{2}\,\Sigma_n B_n\frac{m^2n}{(m^2+n^2)^2}\,E\left(\frac{na}{2}\right)\cos\frac{nb}{2}\,.\end{aligned}$$

De la seconde des $(18)'$ on a aussi:

$$(21)\qquad D=\frac{a}{2}\,\Sigma_n B_n\frac{\mathfrak{E}\left(\frac{na}{2}\right)}{E\left(\frac{na}{2}\right)}\cos\frac{nb}{2}+\Sigma_m\mathfrak{B}_m\frac{1}{m}\left[E\left(\frac{mb}{2}\right)+\frac{mb}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{E}\left(\frac{mb}{2}\right)}\right].$$

Il est aisé de voir que, lorsqu'on a déterminé les coefficients D, B_n, $\mathfrak{B}_m$ de manière que les équations (19), (20), (21) soient satisfaites, et, par conséquent, que soient satisfaites les équations $(18)'$, les fonctions u, v, qu'on obtient en substituant ces valeurs de D, B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans les formules $(16)'$, satisferont aux autres conditions:

$$v\left(-\frac{a}{2},\,y\right)=-f(y),\qquad u\left(x,\,-\frac{b}{2}\right)=0.$$

13. Observons que nous pouvons obtenir les équations (19), (20), en faisant

$$\lambda=-\frac{8}{a^2},\qquad \mu=1+\frac{8}{a^2}$$

dans les équations (β'), (γ') à la page 167 de l'ouvrage de Mathieu; par conséquent, nous pourrons obtenir les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$, exprimés par le coefficient

$$A_0=\left(a+\frac{4}{a}\right)D$$

et par les autres coefficients A_1, A_2, A_3, ..., en faisant:

$$\lambda=-\frac{8}{a^2},\qquad \mu=1+\frac{8}{a^2}$$

dans les formules de résolution, données par Mathieu (loc. cit. page 175).

Il faut remarquer que, dans les dites formules de MATHIEU, le coefficient A_0 est donné, comme tous les coefficients A_n, par le développement en série de la fonction $f(y)$, pendant que notre coefficient A_0 (ou bien notre coefficient D) est inconnu comme les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$. Or nous pouvons éliminer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ de l'expression (21) de notre D (ou A_0).

En effet, substituons dans la formule (21) les valeurs de B_n, $\mathfrak{B}_m$, qu'on peut obtenir, comme l'on a dit plus haut, exprimées par les coefficients $A_0 = \left(a + \frac{4}{a}\right) D$, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Il en résulte une équation du premier degré en D (ou en A_0), d'où on peut tirer la valeur de D (ou de A_0) en fonction des coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Ensuite, il suffira de substituer la valeur de D (ou de A_0), ainsi obtenue, dans les formules qui donnent B_n et $\mathfrak{B}_m$, exprimées par $A_0 = \left(a + \frac{4}{a}\right) D, A_1, A_2, A_3, \ldots$, pour avoir les valeurs des coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ en fonction de $A_1, A_2, A_3, \ldots$

MATHIEU a donné aussi pour le problème B (loc. cit. pages 179, 180, 181) des valeurs numériques (avec cinq décimales), qui servent à calculer les coefficients B_n, $\mathfrak{B}_m$ dans le cas d'un carré ($a = b$).

14. Pour démontrer la convergence des séries, qui composent les formules précédentes, et pour vérifier que les fonctions u, v, que l'on a obtenues, satisfont à toutes les conditions du problème B, nous n'avons qu'à répéter les considérations que nous avons faites aux §§ 7, 8, 9 du présent Chapitre.

En concluant, *les fonctions* u, v, *données par les formules* (16)′, *satisfont aux équations* (1) *et aux conditions* (5) *au contour* C; par conséquent, *elles résoudrent le problème* B.

Remarquons ici, comme au § 9, que la fonction F, donnée par la formule (15)′, représente, à une constante près, la solution des équations (1)′ du Chapitre I, qui correspondent au problème B.

Cette remarque et la remarque analogue du § 9 montrent qu'on peut résoudre directement le problème de l'intégration des équations (1)′ du Chapitre I, en procédant comme précédemment.

En effet, il suffit de partager ce problème en huit autres plus simples, dont quatre sont analogues au problème A et quatre analogues au problème B; et ensuite opérer sur les deux fonctions F, que nous avons introduites précédemment, comme l'on a opéré sur les fonctions u, v des précédents problèmes A et B.

LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES.

PAR

R. DE MONTESSUS

À LILLE.

Introduction.

1. Sans craindre que l'avenir ne démente une telle assertion, on peut affirmer que l'étude des fractions continues algébriques prendra bientôt une grande place en analyse.

Il semble en effet que les fractions continues sont capables de représenter les fonctions mieux que ne le peuvent la plupart des autres algorithmes usités à cet effet. Elles paraissent de plus se prêter aisément aux calculs numériques.

L'étude des fractions continues est cependant à peine ébauchée et les deux grands problèmes qu'elles posent, le premier surtout, n'ont été résolus que dans des cas très particuliers.

Le premier de ces problèmes est celui-ci: *développer une fonction en fraction continue;* le second est *d'étudier la convergence des fractions continues.*

J'ai contribué déjà à l'étude de ces deux problèmes. Je vais le faire encore. Ces résultats, avec quelques autres, déjà publiés, ont été couronnés en décembre 1906 par l'Académie des Sciences de Paris.

I. Le problème du développement.

2. Soit, d'une part, une fonction $F(z)$, définie d'une manière quelconque, par exemple par une équation différentielle, dans une région E du plan x, y.

Soient, d'autre part, des fractions rationnelles

$$\frac{U_0(z)}{V_0(z)}, \frac{U_1(z)}{V_1(z)}, \frac{U_2(z)}{V_2(z)}, \ldots\ldots \frac{U_n(z)}{V_n(z)}, \ldots\ldots,$$

(où $U_n(z)$, $V_n(z)$ sont des polynômes en z de degrés n, une généralisation facile pouvant faire intervenir des polynômes U_n, V_n, qui ne sont pas de même degré en z) telles que pour tout point z_1 d'une certaine région E intérieure à E_1, ou confondue avec E_1, les différences *numériques*

$$mod\left(F(z_1)-\frac{U_0(z_1)}{V_0(z_1)}\right)=\left|F(z_1)-\frac{U_0(z_1)}{V_0(z_1)}\right|,\ \left|F(z_1)-\frac{U_1(z_1)}{V_1(z_1)}\right|,\ldots,\left|F(z_1)-\frac{U_n(z_1)}{V_n(z_1)}\right|,\ldots$$

aillent en diminuant quand l'indice n croît et tendent vers zéro quand cet indice tend vers l'infini.

Cela posé, la suite

$$\frac{U_0(z)}{V_0(z)},\ \frac{U_1(z)}{V_1(z)},\ldots,\frac{U_n(z)}{V_n(z)},\ldots \tag{1}$$

représentera (par définition) la fonction $F(z)$ dans la région E. Elle la représenterait encore, cela est accessoire, si les différences précitées tendaient en moyenne vers zéro quand l'indice n croît indéfiniment, bien que ne diminuant pas toutes quand l'indice croît, si p. e. elles affectaient la forme

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ldots.$$

3. A la suite (1) correspond une fraction continue aisée à construire, mais on peut perdre de vue cette fraction continue et considérer la suite (1) *en soi*.

Le problème du développement de $F(z)$ en fraction continue devient alors celui-ci: *former une suite telle que* (1).

4. Ce problème offre une infinité de solutions *théoriques*, c'est évident.

Or, il se trouve que les fractions continues proprement dites préconisent une solution. La voici.

Si les fractions rationnelles de la suite (1) sont les *réduites* d'une fraction continue

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cfrac{a_4}{\ddots}}}},$$

c. à d. si $\frac{U_0}{V_0}=\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{U_1}{V_1}=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}$, ..., il s'ensuit que les polynômes U_{n+1}, U_n, U_{n-1} sont liés par les relations

$$(2') \qquad U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0$$

et, *de même*, que les polynômes V_{n+1}, V_n, V_{n-1} sont liés par les relations similaires

$$(2'') \qquad V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0.$$

Il est donc naturel de chercher des suites (1) dont les termes soient définis par la connaissance de U_0, V_0, U_1, V_1 et de relations telles que (2).

Une fois les relations (2) formées, on calculera aisément U_n, V_n, donc $\frac{U_n}{V_n}$, pour une valeur donnée de z. *C'est en ce sens que les fractions continues se prêtent aisément au calcul numérique.*

5. En généralisant quelque peu les considérations qui précèdent, on doit donc poser comme il suit le problème du développement:

Former une suite de fractions rationnelles $\frac{U_0}{V_0}, \frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \ldots,$ *liées à la fonction* $F(z)$ *par cette condition: que les différences numériques*

$$\left| F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} \right|$$

tendent, dans leur ensemble, vers zéro quand n croît indéfiniment, et, de plus, dont les termes soient liés par des relations de récurrence

$$\begin{cases} U_{n+p} + a_1 U_{n+p-1} + a_2 U_{n+p-2} + \cdots + a_p U_n = 0, \\ V_{n+p} + a_1 V_{n+p-1} + a_2 V_{n+p-2} + \cdots + a_p V_n = 0, \end{cases}$$

où p est indépendant de n, où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des fonctions, évidemment polynômes, connues. $U_0, U_1, \ldots, U_{p-2}, V_0, V_1, \ldots, V_{p-2}$ *seront calculés directement.*

6. Le problème ainsi posé, et jusqu'ici il ne peut l'être différemment, laisse une large place à l'arbitraire, car cette condition:

les différences $\left| F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} \right|$ *doivent tendre vers zéro quand n croît indéfiniment,*

n'est pas précisée.

Si $F(z)$ + *polynôme* + $s_0 + \frac{s_1}{z} + \cdots + \frac{s_k}{z^k}$ (où les *deux* termes complémentaires écrits *polynôme*, $s_0 + \frac{s_1}{z} + \cdots + \frac{s_k}{z^k}$, peuvent être absents) peut être développée en série

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_n}{z^n} + \cdots,$$

il est naturel de déterminer $\frac{U_n(z)}{V_n(z)}$ par cette condition: *que les* $2n+1$ *premiers termes de son développement en* $\frac{1}{z}$ *soient* S_0, $\frac{S_1}{z}$, $\frac{S_2}{z^2}, \ldots, \frac{S_{2n}}{z^{2n}}$, *en sorte que, aux deux termes complémentaires près,*

$$F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{\lambda_1}{z^{2n+1}} + \frac{\lambda_2}{z^{2n+2}} + \cdots, \text{ où peu importent les } \lambda.$$

Cette condition suffit à définir les fractions $\frac{U_n}{V_n}$.

Reste à calculer la loi de récurrence (2). Le problème n'est pas résolu, mais il est posé de façon précise.

On peut faire de même si $F(z)$ admet un développement de la forme $S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$

7. *Le problème du développement n'a été résolu que dans un petit nombre de cas.*

Quelques auteurs, Euler, Lagrange, Laplace et Gauss, entre autres, ont formé les relations (2) en calculant

$$U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, \ldots, a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$$

et en remarquant qu'une loi *apparaît* dans la forme des polynômes a_{n+1}, b_{n+1} (qui figurent dans les relations (2)): cela permet d'écrir a_n, b_n.

Ce procédé n'a aucun interêt.

Seul, Laguerre a esquissé une méthode non empirique, mais il n'a vraiment développé que quelques fonctions très-simples.

Au prix de calculs fort compliqués, j'ai réussi à développer, d'après les indications de Laguerre, [1] les fonctions $Z(z)$ qui vérifient l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z + H(z),$$

a, b, c, d, p, q étant des constantes et $H(z)$ un polynôme. Il est supposé que $Z(z)$ admet un développement *formel*

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$$

et cela exige que l'équation différentielle soit réduite à celle-ci:

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z + c_0 + c_1 pz,$$

$a, b, c, d, p, q, c_0, c_1$ étant des constantes.

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1905.

Dès lors les fonctions $Z(z)$ effectivement développées en fractions continues sont toutes de la forme

$$Z(z) = \frac{c_0 + c_1 pz}{(az+b)(cz+d)} e^{-\int \frac{pz+q}{(az+b)(cz+d)} dz}$$

Deux formes particulières sont intéressantes; si c_0 et c_1 sont nuls,

$$Z(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\frac{q}{ad-bc}} ;$$

si p et q sont nuls,

$$Z(z) = \frac{c_0}{bc - ad} \log \frac{cz+d}{az+b}.$$

La méthode de développement indiquée par Laguerre est-elle susceptible d'extension?

8. La méthode de développement indiquée par Laguerre est actuellement la seule qui offre quelque généralité. Elle s'applique aux fonctions $Z(z)$ qui, admettant un développement formel

$$(3) \qquad S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$$

vérifient en outre l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z + c_0 + c_1 pz .$$

Cette méthode s'applique-t-elle aux fonctions $Z(z)$ qui, admettant un développement formel (3) vérifient l'équation différentielle plus générale

$$(4) \qquad A_a(z) . Z'(z) + B_b(z) . Z(z) + C_c(z) = 0 ,$$

où $A_a(z)$, $B_b(z)$, $C_c(z)$ sont des polynômes en z de degrés respectifs a, b, c?

9. *La réponse est malheureusement négative.* C'est en vain que Laguerre s'est efforcé de vaincre les difficultés qui se présentent. Mais ces difficultés ne sont peut-être pas insurmontables. Il y a donc lieu de les indiquer, car le problème offre un grand interêt.

Tout d'abord, la nécessité que $Z(z)$ admette un développement de la forme (3) implique entre les degrés a, b, c des polynômes A, B, C l'une des relations, qui s'excluent mutuellement,

$$a-2=b>c,\quad a-2=c>b,\quad b=c>a-2,\quad a-2=b=c,$$

ce qui restreint la généralité de l'équation (4).

A dire vrai, en dehors des seuls cas où

$$a-2>b \geqq c,\quad b>a-2 \geqq c,$$

$Z(z)$ admet un développement de l'une des formes

$$S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots,\ \text{polynôme}+S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots,\ \frac{S^p}{z^p}+\frac{S^{p+1}}{z^{p+1}}+\frac{S^{p+2}}{z^{p+2}}+\cdots$$

et, par suite, on peut déduire de (4) une équation

$$D_d(z)\,T'(z)+E_e(z)\,T(z)+F_f(z)=0$$

dont une solution

$$T(z)=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots=\begin{cases}\textit{soit}\ Z(z)-\text{polynôme}\\ \textit{soit}\ S_0+\dfrac{S_1}{z}+\dfrac{S_2}{z^2}+\cdots+\dfrac{S^{p-1}}{z^{p-1}}+Z(z)\end{cases}$$

a la forme voulue.

$T(z)$ étant développée en fraction continue, $Z(z)$ pourra être regardé comme l'étant elle-même.

10. La fonction $Z=c^{-\frac{2}{z}-\frac{g}{z^2}}$, étudiée par Laguerre, nous montrera clairement où gît la difficulté signalée plus haut.

Essayons de la développer.

Elle vérifie l'équation differentielle

$$z^3Z'(z)=2(z+g)Z \tag{5}$$

et elle admet bien un développement formel

$$S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots\ :$$

il est aisé de le constater, en substituant ce développement dans l'équation (5).

Soient des polynômes U, V définis par les relations (les λ ne sont pas déterminés à priori)

$$\frac{U_0}{V_0}=\frac{a_0^0}{b_0^0}=S_0,\quad \frac{U_1}{V_1}=\frac{a_0^1z+a_1^1}{b_0^1z+b_1^1}=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\frac{\lambda_1^1}{z^3}+\cdots$$

$$\frac{U_2}{V_2}=\frac{a_0^2z^2+a_1^2z+a_2^2}{b_0^2z^2+b_1^2z+b_2^2}=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\frac{S_3}{z^3}+\frac{S_4}{z^4}+\frac{\lambda_1^2}{z^5}+\cdots,$$

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{\lambda_1}{z^{2n+1}} + \cdots,$$

relations qui permettent de calculer les quantités a, b.

Cela posé, la méthode de Laguerre comprend trois parties.

1°. On peut écrire

$$Z(z) = \frac{U_n}{V_n} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

$\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ désignant une série de la forme $\frac{\lambda}{z^{2n+1}} + \frac{\mu}{z^{2n+2}} + \frac{\nu}{z^{2n+3}} + \cdots$, d'où

$$Z'(z) = \frac{V_n U'_n - U_n V'_n}{V_n^2} + \left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right);$$

substituons dans (5):

$$z^3[V_n U'_n - U_n V'_n] - 2(z+g) U_n V_n = -V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right) + 2(z+g) V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) = V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right);$$

changeons z en $\frac{1}{z}$ et désignons par (z^{2n-1}) les séries de la forme $\lambda' z^{2n-1} + \mu' z^{2n} + \nu' z^{2n+1} + \cdots$:

$$\frac{1}{z^3}\left[V_n\left(\frac{1}{z}\right) U'_n\left(\frac{1}{z}\right) - U_n\left(\frac{1}{z}\right) V'_n\left(\frac{1}{z}\right)\right] - 2\left(\frac{1}{z} + g\right) U_n\left(\frac{1}{z}\right) V_n\left(\frac{1}{z}\right) = V_n^2\left(\frac{1}{z}\right)(z^{2n-1});$$

multiplions par z^{2n+2} et posons

$$z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right) = U_{n,1}, \quad z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right) = V_{n,1}, \text{ etc.} \ldots$$

Il viendra

$$V_{n,1} \cdot U'_{n,1} - U_{n,1} \cdot V'_{n,1} - 2z(1+gz) U_{n,1} \cdot V_{n,1} = V_{n,1}^2 (z^{2n+1}) = h_0 z^{2n+1} + h_0 z^{2n+2} + \cdots$$

Le premier membre de cette relation est un polynôme de degré $2n+2$; donc aussi le second membre, qui, dès lors, se réduit à

$$h_0 z^{2n+1} + h_1 z^{2n+2};$$

divisant par z^{2n+2},

$$\frac{1}{z^3}\left[V_n\left(\frac{1}{z}\right) U'_n\left(\frac{1}{z}\right) - U_n\left(\frac{1}{z}\right) V'_n\left(\frac{1}{z}\right)\right] - 2\left(\frac{1}{z} + g\right) U_n\left(\frac{1}{z}\right) V_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{h_0}{z} + h_1;$$

changeant à nouveau z en $\frac{1}{z}$,

$$z^3(V_n U'_n - U_n V'_n) - 2(z+g)U_n V_n = h_0 z + h_1$$

ce qu'on peut écrire

$$V_n^2\left[z^3\left(\frac{U_n}{V_n}\right)' - 2(z+g)\frac{U_n}{V_n}\right] = h_0 z + h_1 \,. \tag{6}$$

En général, on aura

$$V_n^2\left[A\left(\frac{U_n}{V_n}\right)' + B\left(\frac{U_n}{V_n}\right) + C\right] = D\,. \tag{7}$$

On a ainsi formé une équation différentielle que vérifie $\frac{U_n}{V_n}$; le second membre de cette équation, $h_0 z + h_1$ ou D, est *inconnu*. S'il se réduit à une constante, comme dans le cas des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z(z) + c_0 + c_1 pz\,, \tag{8}$$

on peut donner à cette constante une valeur *arbitraire* et poursuivre les calculs. Mais, il est facile de le voir en traîtant directement l'équation (4), ce second membre ne se réduit à une constante que pour l'équation (8).

Il se pose donc ici cette question: *calculer le second membre de l'équation* (6) *et des équations analogues auxquelles on peut être conduit.*

2°. *Ce second membre calculé,* on pourra former, comme l'a indiqué Laguerre, une équation différentielle vérifiée par V_n, équation que j'ai formée pour les fonctions $Z(z)$ que définit l'équation (8). Voici le calcul. Posant $T = e^{\int \frac{Bb}{Aa} dz}$, soient

$$y_1 = V_n(z),\ \ y_2 = T[U_n(z) - V_n(z)Z(z)]\,,$$

deux solutions d'une équation différentielle

$$Ny'' - My' + Hy = 0\,. \tag{9}$$

Cherchons la forme que N, M, H doivent affecter.

Entre

$$Ny''_1 - My'_1 + Hy_1 = Ny''_2 - My'_2 + Hy_2 = 0\,,$$

éliminons H:

$$N(y''_1 y_2 - y''_2 y_1) = M(y'_1 y_2 - y'_2 y_1)\,,$$

d'où

(10) $$\frac{M}{N}=\frac{d}{dz}\operatorname{Log}(y'_1 y_2 - y'_2 y_1).$$

Calculons $\frac{M}{N}$:

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = V_n^2\left\{T\left[Z'-\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right]+T'\left(Z-\frac{U_n}{V_n}\right)\right\},$$

or, (7) donne

$$V_n^2\left[A\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'+B\left(\frac{U_n}{V_n}\right)+C\right]=D,$$

et, par hypothèse

$$V_n^2[AZ'+BZ+C]=0,$$

d'où, par soustraction,

$$V_n^2\left\{A\left[Z'-\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right]+B\left[Z-\frac{U_n}{V_n}\right]\right\}=-D;$$

si l'on remarque que

$$T=\varrho A,\quad T'=\varrho B,\quad \left(\varrho=\frac{1}{A}e^{\int\frac{B}{A}dz}\right),$$

on peut écrire

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = V_n^2\left\{\varrho A\left[Z'-\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right]+\varrho B\left(Z-\frac{U_n}{V_n}\right)\right\},$$

et il vient enfin

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = -\varrho D,$$

d'où

$$\frac{M}{N}=\frac{d}{dz}\operatorname{Log}(-\varrho D)=-\frac{A'}{A}+\frac{B}{A}+\frac{D'}{D}.$$

L'équation (9) que vérifie y_1 ou V_n s'écrit donc

$$y''-\left(-\frac{A'}{A}+\frac{B}{A}+\frac{D'}{D}\right)y'+\frac{H}{N}y=0.$$

Posant $\frac{H}{N}=\frac{L}{AD}$, on voit que V_n vérifie l'équation différentielle

(11) $$V''_n-\left(-\frac{A'}{A}+\frac{B}{A}+\frac{D'}{D}\right)V'+\frac{L}{AD}V=0,$$

où, *D supposé connu,* L (qui est évidemment un polynôme, comme V''_n, V'_n, A, B, D, A', D' ou peut-être une fraction rationnelle) est à déterminer.

Voilà un nouveau problème, sans doute moins difficile que le précédent.

3°. De l'équation (10), il s'agira ensuite de déduire les relations de récurrence

$$(12) \qquad \begin{cases} U_{n+1} - P_n U_n - Q_n U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - P_n V_n - Q_n V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

que vérifient les polynômes U, V. C'est peut-être le plus facile des trois problèmes, car P_n, Q_n ont une forme particulièrement simple.

En effet, d'après la définition même des fractions rationnelles $\frac{U_n}{V_n}$,

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = V_n V_{n+1} \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right).$$

Changeons z en $\frac{1}{z}$, multiplions par z^{2n+1} et posons

$$z^{n+1} U_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = U^1_{n+1}, \quad z^{n+1} V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = V^1_{n+1}, \dots :$$

$$U^1_{n+1} V^1_n - U^1_n V^1_{n+1} = V^1_n V^1_{n+1} (z^{2n+1}) = S'^{n+1}_0 z^{2n+1} + S^{n+1}_1 z^{2n+2} + \dots$$

le premier membre étant de degré $2n+1$, il en est de même du second, qui se réduit par suite à $S^{n+1}_0 z^{2n+1}$; donc

$$\frac{U^1_{n+1}}{V^1_{n+1}} - \frac{U^1_n}{V^1_n} = \frac{S^{n+1}_0 z^{2n+1}}{V^1_n V^1_{n+1}};$$

échangeant à nouveau z en $\frac{1}{z}$,

$$\frac{U^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)}{V^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{U^1_n\left(\frac{1}{z}\right)}{V^1_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{S^{n+1}_0}{V^1_n\left(\frac{1}{z}\right) V^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n+1}},$$

ou

$$\frac{z^{n+1} U^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1} V^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{z^n U^1_n\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V^1_n\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{S^{n+1}_0}{V^1_n\left(\frac{1}{z}\right) V^1_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n+1}},$$

ou enfin,

$$\frac{U_{n+1}(z)}{V_{n+1}(z)} - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{S_0^{n+1}}{V_n(z)\, V_{n+1}(z)}$$

c. à. d.

(13) $$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = S_0^{n+1} ;$$

or, les relations (11) nous donnent, par élimination de P_n,

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = - Q_n (U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n) ;$$

de même,

$$U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n = - Q_{n-1} (U_{n-1} V_{n-2} - U_{n-2} V_{n-1})$$

. . . .

$$U_2 V_1 - U_1 V_2 = - Q_1 (U_1 V_0 - U_0 V_1) ;$$

multipliant toutes ces relations membres à membres,

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = \pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} Q_n (U_1 V_0 - U_0 V_1) ;$$

$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1}$, $U_1 V_0 - U_0 V_1$ sont indépendants de z, en vertu de la relation (13); donc $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ l'est aussi et Q_n l'est lui-même en dernier lieu.

Ainsi, *Q_n est indépendant de z.*

D'autre part, un calcul semblable montre que

$$U_{n+1} V_{n-1} - V_{n+1} U_{n-1}$$

est de la forme

$$\gamma_0^{n+1} + \gamma_1^{n+1} z ;$$

or, si l'on élimine Q_n entre les relations (12), il vient

$$U_{n+1} V_{n-1} - V_{n+1} U_{n-1} = P_n (U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n)$$

ou

$$\gamma_0^{n+1} + \gamma_1^{n+1} z = P_n S_0^n ;$$

donc P_n est de la forme

$$H_n z + K_n$$

et les relations (12) s'écrivent

(14) $$\begin{cases} U_{n+1} - (H_n z + K_n) U_n - Q_n U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - (H_n z + K_n) V_n - Q_n V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

où H_n, K_n, Q_n sont indépendants de z.

Cette forme très-simple des relations (14) permet de penser qu'on peut les déduire facilement des relations (11) une fois connues. Je l'ai fait pour le cas de l'équation (8).

10. En définitive, la méthode de LAGUERRE ne peut, telle qu'elle est, se prêter à une extension. Il y a lieu de lui apporter de notables perfectionnements: nous avons dit en quels points. Le problème mérite qu'on l'étudie.

11. Nous allons aborder maintenant le problème de la convergence.

Remarquons à ce propos que ce problème n'est pas intimement lié à celui du développement. Il est peu de fonction qu'on sache développer en séries de puissances, séries de polynômes, séries trigonométriques. On sait cependant quels beaux travaux l'étude de la convergence de ces séries a inspiré.

II. Le problème de la convergence.

12. Je vais préciser et compléter des résultats que j'ai donnés dans un mémoire déjà publié. [1]

L'équation $(az+b)(cz+d)Z' = (pz+q)Z + c_0 + c_1 pz$.

13. J'ai montré [1] que le développement en fraction continue de la fonction Z converge pour toutes les valeurs de z, sauf *peut-être* pour les points du plan des x, y situés sur la droite joignant les deux points $z_1 = -\frac{b}{a}$, $z_2 = -\frac{d}{c}$.

Je vais montrer que si a, b, c, d, p, q, c_0, c_1 sont réels, il y a sûrement divergence en tous les points du segment de droite $z_1 z_2$. Je généraliserai plus loin les considérations que je vais exposer et j'en tirerai une conclusion des plus importantes (§ 15).

Je simplifierai l'exposé en me bornant au cas où $p = 0$ et où $ac < 0$.

Alors, les relations (12) sont [1]

$$(15)\qquad \begin{cases} U_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)\,U_n + (n^2 R^2 - \omega^2)\,U_{n-1} = 0\,, \\ V_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)\,V_n + (n^2 R^2 - \omega^2)\,V_{n-1} = 0\,, \end{cases}$$

avec

$$(15^{\text{bis}})\qquad P = ac, \quad 2Q = ad + bc, \quad 2R = ad - bc, \quad 2\omega = q.$$ [1]

De plus, [1]

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1905. Quelques-uns de ces résultats ont été communiqués sans démonstrations à l'Académie des sciences de Paris (C. R. 1905).

$$(15^{\text{ter}})\qquad (az+b)(cz+d)\frac{d}{dz}V_n = [n(Pz+Q)-\omega]\,V_n-(n^2R^2-\omega^2)\,V_{n-1}.$$

Je désignerai par ν le plus petit entier positif vérifiant la relation

$$(16)\qquad \nu-1<\left|\frac{\omega}{R}\right|<\nu,$$

d'où

$$(17)\qquad n^2R^2-\omega^2<0 \text{ pour } n=1,2,3,\ldots,\nu-1 \text{ et } n^2R^2-\omega^2>0 \text{ pour } n\geq\nu.$$

Considérons alors la suite

$$(18)\qquad V_{\nu-1},\ V_{\nu-2},\ V_{\nu-3},\ \ldots,\ V_1,\ V_0.$$

Cette suite a les propriétés suivantes.

1°. Deux fonctions consécutives V_{n+1}, V_n ne s'annulent pas pour une même valeur de la variable z; si ce fait se produisait, en vertu des relations

$$V_{n+1}-(2n+1)(Pz+Q)\,V_n+(n^2R^2-\omega^2)\,V_{n-1}=0,\ \text{etc.}\ldots,$$

V_0 s'annulerait pour cette valeur de z. Cela est impossible, puisque V_0 est indépendant de z.

2°. V_0, qui est une constante, a le même signe pour toutes les valeurs réelles de z.

3°. En raison de la relation

$$V_{\nu-p}-[2(\nu-p-1)+1](Pz+Q)\,V_{\nu-p-1}+[(\nu-p-1)^2R^2-\omega^2]\,V_{\nu-p-2}=0,$$

si $V_{\nu-p-1}$ s'annule pour une valeur réelle de z, $V_{\nu-p}$, $V_{\nu-p-2}$ sont de signes contraires pour cette même valeur réelle de z, puisque (17) le coefficient de $V_{\nu-p-2}$ est négatif.

4°. On a (15)

$$(az+b)(cz+d)\,V'_{\nu-1}=[(\nu-1)(Pz+Q)-\omega]\,V_{\nu-1}-[(\nu-1)^2R^2-\omega^2]\,V_{\nu-2};$$

donc, si $V_{\nu-1}$ s'annule pour une valeur réelle de z compris entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, $V_{\nu-2}$, $V'_{\nu-1}$ ont le même signe pour cette valeur de z.

La suite (18) *est donc une suite de Sturm pour les valeurs de z comprises entre* $-\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$.

Théorème. $V_{\nu-1}$ **n'a aucune racine réelle comprise entre** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

[1] *Rendiconti del Circolo math. di Palermo.* 1905.

D'après le théorème de STURM, le nombre de racines réelles de $V_{\nu-1}$ comprises entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ est égal à l'excès du nombre des variations que présente la suite (18) pour $z=-\frac{b}{a}$ sur le nombre des variations qu'elle présente pour $z=-\frac{d}{c}$.

Nous allons voir que cet excès est nul.

Calculons la valeur que prend $Pz+Q$ pour $z=-\frac{b}{a}$, $z=-\frac{d}{c}$;

$$(19)\qquad \begin{cases} (Pz+Q)_{z=-\frac{b}{a}} = P\left(-\frac{b}{a}\right)+Q = ac\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{ad+bc}{2} = R \\ (Pz+Q)_{z=-\frac{d}{c}} = -R. \end{cases}$$

De plus, faisons $z=-\frac{b}{a}$, $z=-\frac{d}{c}$ dans la relation (15) ou plutôt celle-ci:

$$(az+b)(cz+d)\,V'_{\nu-p} = [(\nu-p)(Pz+Q)-\omega]\,V_{\nu-p} - [(\nu-p)^2R^2-\omega^2]\,V_{\nu-p-1};$$

il vient (19) $\left[V^1_\pi = (V_\pi)_{z=-\frac{b}{a}},\ V^2_\pi = (V_\pi)_{z=-\frac{d}{c}}\right]$

$$(20)\qquad V^1_{\nu-p} - [(\nu-p)R+\omega]\,V^1_{\nu-p-1} = 0,\quad V^2_{\nu-p} + [(\nu-p)R-\omega]\,V^2_{\nu-p-1} = 0.$$

Or

$$-[(\nu-p)R+\omega],\quad [(\nu-p)R-\omega]$$

sont de même signe, car leur produit

$$-[(\nu-p)R^2-\omega^2]$$

est positif (17).

La suite (18) présente donc, comme le montrent les relations (20), autant de variations pour $z=-\frac{b}{a}$ que pour $z=-\frac{d}{c}$, c. q. f. d.

Considérons maintenant la suite

$$(21)\qquad V_n,\ -V_{n-1},\ +V_{n-2},\ \cdots \pm V_{\nu+1},\ \mp V_\nu,\ \pm V_{\nu-1}.$$

I. Deux fonctions consécutives de cette suite ne s'annulent pas pour une même valeur de z comprise entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, (13) puisque $V_{\nu-1}$ ne s'annule pas elle-même (supra) dans cet intervalle.

II. $V_{\nu-1}$ conserve un signe constant quand z varie de $-\frac{b}{a}$ à $-\frac{d}{c}$ puisqu'elle ne s'annule pas dans cet intervalle.

III. On a (13), $V_{h+1}+(2h+1)(Pz+Q)(-V_h)+(h^2R^2-\omega^2)V_{h-1}=0$ avec (17) $h^2R^2-\omega^2>0$; donc si V_h s'annule pour une valeur z_0 de l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, $V_{h+1}(z_0)$, $V_{h-1}(z_0)$ ont des valeurs de signes contraires.

IV. En raison de la relation (15) où $n^2R^2-\omega^2>0$, pour toute valeur de z annulant V_n, V'_n et $(-V_{n-1})$ ont le même signe.

La suite (21) *est donc une suite de Sturm pour les valeurs de z comprises entre* $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

Cela nous permet de calculer le nombre de racines réelles que possède V_n dans l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

Pour $z=-\frac{b}{a}$, $z=-\frac{d}{c}$ la relation (15) donne $\left[n=h,\ P\left(-\frac{b}{a}\right)+Q=R,\ P\left(-\frac{d}{c}\right)+Q=-R,\ V_h^1=V_h\left(-\frac{b}{a}\right),\ V_h^2=V_h\left(-\frac{d}{c}\right)\right]$

$$\begin{cases}(hR-\omega)V_h^1+(h^2R^2-\omega^2)(-V_{h-1}^1)=0,\\ -(hR+\omega)V_h^2+(h^2R^2-\omega^2)(-V_{h-1}^2)=0.\end{cases}$$

ou

$$\begin{cases}V_h^1+(hR+\omega)(-V_{h-1}^1)=0,\\ V_h^2-(hR-\omega)(-V_{h-1}^2)=0,\end{cases}$$

avec (17)

$$(hR+\omega)(hR-\omega)=h^2R^2-\omega^2>0,$$

ce qui montre que $hR+\omega$, $-(hR-\omega)$ sont de signes contraires; l'une des suites

$$\ldots,\ V_h^1,\ -V_{h-1}^1,\ V_{h-2}^1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ V_h^2,\ -V_{h-1}^2,\ V_{h-2}^2,\ \ldots$$

ne présente donc que des variations, tandis que l'autre n'en présente pas; le nombre des variations de celle qui en présente est (21) $n-(\nu-1)=n-\nu+1$, c'est aussi l'excès du nombre des variations de l'une des deux suites sur le nombre des variations de l'autre suite, en sorte que V_n possède $n-\nu+1$ racines réelles dans l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$. ν étant un nombre fixe, on voit que V_n *possède un*

nombre de racines, comprises entre $-\frac{b}{a}$ *et* $-\frac{d}{c}$, *d'autant plus grand que* n *est lui-même plus grand.*

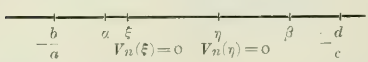
On aperçoit donc ici la cause de la divergence sur le segment rectiligne $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$: *Quel que soit le point* z_0 *de cet intervalle,* $V_n(z_0)$ *tendra vers zéro quand* n *croîtra indéfiniment et par suite,* $\frac{U_n(z_0)}{V_n(z_0)}$ *tendra vers l'infini.*

V_n a bien des racines (en nombre fixe $\nu - 1$) extérieures à ce segment; mais aucune de ces racines n'est infiniment voisine des racines de V_{n+1}, $V_{n+2}, \ldots$; si donc $V_n(z_k) = 0$, z_k extérieur à $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, on aura une suite convergente au point z_k en supprimant $\frac{U_n(z_k)}{V_n(z_k)}$ de la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \frac{U_1}{V_1}, \ldots, \frac{U_n}{V_n}, \ldots$$

On peut confirmer l'assertion précédente en montrant que:

Théorème: Si ξ, η sont deux racines réelles, consécutives, comprises entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ de l'équation $V_n = 0$, $(n > \nu)$, elles comprennent une racine et une seule de l'équation $V_{n-1} = 0$.



Choisissons deux nombres α, β de l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, α plus petit que ξ, β plus grand que η (on suppose $\xi < \eta$) tels que $-V_{n-1}(\alpha)$ et $-V_{n-1}(\xi)$ soient de même signe et $-V_{n-1}(\eta)$, $-V_{n-1}(\beta)$ soient aussi de même signe; il suffira que α, β soient assez voisin respectivement de ξ, η.

Si V_n passe d'une valeur négative à une valeur positive quand z atteint et dépasse ξ, il passera d'une valeur positive à une valeur négative quand z atteindra et dépassera η, puisque ξ, η sont deux racines *consécutives* de V_n. Il en résulte que $V'_n(\xi)$ est, dans cette hypothèse, positif; or la relation

$$(az+b)(cz+d)\,V'_n = [n(Pz+Q) - \omega]\,V_n + (n^2R^2 - \omega^2)(-V_{n-1})$$

donne

$$(a\xi+b)(c\xi+d)\,V'_n(\xi) = (n^2R^2 - \omega^2)[-V_{n-1}(\xi)],$$

où

$$(a\xi+b)(c\xi+d) > 0 \text{ (on suppose } ac < 0) \text{ et } n^2R^2 - \omega^2 > 0;$$

on en conclut que

$$V_n'(\xi) \text{ et } \quad -V_{n-1}(\xi)$$

sont de même signe, que $-V_{n-1}(\xi)$ est positif, que $-V_{n-1}(\alpha)$ est aussi positif. *De même*, $-V_{n-1}(\beta)$ est, comme $-V_{n-1}(\eta)$, négatif.

Si V_n passait du positif au négatif quand z atteint et dépasse ξ, $-V_{n-1}(\alpha)$ serait négatif et $-V_{n-1}(\beta)$ serait positif.

Nous avons donc

soit
$$\begin{cases} V_n(\alpha) < 0 & -V_{n-1}(\alpha) > 0\,, \\ V_n(\beta) > 0 & -V_{n-1}(\beta) < 0\,, \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} V_n(\alpha) < 0 & -V_{n-1}(\alpha) < 0\,, \\ V_n(\beta) < 0 & -V_{n-1}(\beta) > 0\,. \end{cases}$$

Dans la première hypothèse, V_n, $-V_{n-1}$ perdent *une* variation quand on passe de α à β.

Or la suite

$$V_n\,, \; -V_{n-1}\,, \; V_{n-2}\,, \ldots, \pm V_{\nu-1}$$

perd *deux* variations quand on passe de α à β, puisque α, β comprennent deux racines de $V_n = 0$ et pas davantage.

Donc la suite

$$-V_{n-1}\,, \; V_{n-2}\,, \ldots, \pm V_{\nu-1}$$

perd *une* variation quand on passe de α à β, ou de ξ à η; par suite, ξ, η comprennent bien une racine et une seule de $-V_{n-1} = 0$.

On voit ainsi que **dans l'intervalle** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, **les racines réelles de** $V_n = 0$ **séparent les racines réelles de** $V_{n-1} = 0$.

Resterait à prouver que **dans tout intervalle** $h_1 h_2$ **du segment** $-\frac{a}{b}$, $\frac{d}{c}$ **existe au moins une racine de** $V_n = 0$, **si l'on prend** n **assez grand, et cela quelque petit que soit l'intervalle** $h_1 h_2$. La divergence de la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \; \frac{U_1}{V_1}, \; \frac{U_2}{V_2}, \ldots$$

sur le segment $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ serait ainsi *complètement* établie. Je ne m'arrête pas à cette proposition, dont je n'ai pas la démonstration, car d'une part il me suffit de la faire presentir pour indiquer la raison de la divergence de la suite indiquée sur le segment $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ et, d'autre part, on ne peut songer, avec les moyens

dont dispose l'algèbre actuelle à étendre au segment $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, *supposé imaginaire,* les propositions que nous avons démontrées dans le cas où il est réel. Je reviendrai un peu plus loin sur cette question, qui se prête à une généralisation complète (§ 19).

La représentation des fonctions par des fractions continues.

14. Ayant développé une fonction en fraction continue, il y a lieu de prouver que la différence entre la fonction et la réduite $\frac{U_n}{V_n}$ de rang n tend vers zéro. Je vais le faire pour le développement de la fonction

$$Z(z) = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) - (pz+q)Z - c_0 - c_1 pz = 0,$$

seul développement que la méthode de Laguerre permette d'obtenir.

Je partirai de la relation

$$az+b)(cz+d)(V_n U'_n - U_n V'_n) - (pz+q)U_n V_n - (c_0+c_1 pz)V_n^2 = U_n V_{n+1} - U_{n+1} V_n,$$

que j'ai obtenue dans un mémoire précité et que j'écrirai

$$(az+b)(cz+d)\frac{d}{dz}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) - (pz+q)\frac{U_n}{V_n} - (c_0+c_1 pz) = \frac{U_n}{V_n}\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}\frac{V_{n+1}}{V_n};$$

par soustraction de l'équation définissant $Z(z)$, il vient

$$(az+b)(cz+d)\left[Z'(z) - \frac{d}{dz}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)\right] - (pz+q)\left(Z - \frac{U_n}{V_n}\right) = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right)\frac{V_{n+1}}{V_n}.$$

Par hypothèse, $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers une limite. Si $Z - \frac{U_n}{V_n}$ tend vers une limite W, on aura donc

$$(az+b)(cz+d)W' - (pz+q)W = 0.$$

Il faut montrer que

$$W = C(az+b)^{a_1}(cz+d)^{b_1} \quad (ac(a_1+b_1)=p,\ a_1ad+b_1bc=q)$$

est nul.

Cela ressort de ce que W n'est pas développable en série $S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$; or, comme $Z(z)$ et comme $\frac{U_n}{V_n}$, il devrait l'être.

Divergence et cause générale de divergence.

15. Dans un mémoire souvent cité au cours de cette étude, j'ai étudié la convergence de types bien définis de fractions continues, ou suites de fractions rationelles $\frac{U_n}{V_n}$.

Tous les types étudiés se ramènent à ceux définis par des relations de récurrence

$$\begin{cases} A \cdot U_{n+1} + B \cdot U_n + C \cdot U_{n-1} = 0 \\ A \cdot V_{n+1} + B \cdot V_n + C \cdot V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

où A, B, C sont des polynômes en z et n.

Mes résultats se résument comme il suit.

(22) *Soit* $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$ *la forme que prend l'équation*

$$A + B\alpha + C\alpha^2 = 0$$

pour n infini; la suite de réduites $\frac{U_n}{V_n}$ *converge en tous les points du plan de la variable z, sauf peut-être sur certaines coupures. Ces coupures sont de celles qui rendent uniforme la fonction développée. Elles sont définies comme étant les lieux géométriques des points z dont les coordonnées rendent égaux les modules des racines* α_1, α_2 *de l'équation* (22).

La divergence est *certaine*, c'est une conséquence de la théorie des fonctions. Mais je n'avais pu la démontrer, d'où l'emploi du mot *peut-être*.

Je puis aller plus loin actuellement et démontrer la divergence sur les coupures, dans les cas où elles sont réelles, A, B, C étant eux-même supposés réels.

Si ces coupures sont les segments

$$(a_1, a_2),\ (a_3, a_4), \ldots, (a_{h-1}, a_h)$$

de ox, les trois fonctions V'_n, V_n, V_{n-1} vérifient en effet une équation de la forme

$$(23) \qquad (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_h)\frac{dV_n}{dz} =$$

$$= (H_1 z^{h-1} + H_2 z^{h-2} + \cdots + H_h) V_n + (L_1 z^h + L_2 z^{h-1} + \cdots + L_{h+1}) V_{n-1}$$

H_i, L_i étant des fonctions de n aisées à calculer, au moins dans les cas simples, et voici comment.

Dérivons la relation

$$(24) \qquad AV_{n+1} + BV_n + CV_{n-1} = 0;$$

remplaçons V'_{n+1}, V'_n, V'_{n-1} par leur valeurs (23), nous aurons une relation entre V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, V_{n-2}; dans cette relation nous remplacerons V_{n-2} par sa valeur en V_n, V_{n-1} tirée de (24) et nous arriverons à une relation en V_{n+1}, V_n, V_{n-1} qui contiendra les H, K, et qui devra être identique à (24). L'identification avec (24) permettra de calculer *effectivement* les H, L et d'écrire *explicitement* la relation (23), si l'on tient compte des valeurs que prennent les H et L pour $n=1$.

En possession de la relation (23), nous pourrons démontrer la divergence comme nous l'avons démontrée au § 13.

Il en résulte cette conclusion très importante:

Chaque segment, si petit qu'il soit, des coupures contient au moins une racine des dénominateurs V_n des réduits $\frac{U_n}{V_n}$, si n est sufissamment grand.

Pour cette raison, sur les coupures, $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers l'infini.

Pour cette raison encore, les points où il y a divergence constituent des arcs de courbe et non pas des aires, car les racines de V_n ne peuvent tendre, sauf cas tout-à-fait exceptionnels, à couvrir une aire.

Extension de la méthode définissant les lieux de divergence des fractions continues.

16. Les fractions continues algébriques convergent *d'ordinaire* en tous les points du plan de la variable sauf sur certains arcs de courbe, aisés à obtenir (§ 19).

La méthode qui m'a conduit à ces résultats généraux [1] suppose que dans la relation de récurrence

$$A V_{n+1} + B V_n + C V_{n-1} = 0$$

A, B, C soient des *polynômes* en z et n. (Je puis actuellement m'affranchir de cette restriction, mais je ne puis publier encore les résultats que j'ai obtenus à ce sujet).

Divers artifices de calcul permettent d'étudier des relations de récurrence ne satisfaisant point à cette condition. [1]

Il est un de ces artifices sur lequel je dois appeler l'attention et je vais exposer sur un exemple particulier les réflexions qu'il m'a fait faire.

Gauss a donné le développement

$$\text{Log}\,(1+z) = z\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2}z}{1+\cfrac{\frac{1}{6}z}{1+\cfrac{\frac{2}{6}z}{1+\cfrac{\frac{2}{10}z}{1+\cdots}}}}} \tag{25}$$

Nous avons donc ici

$$\begin{cases} U_{n+1} - b_{n+1}\,U_n - a_{n+1}\,U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - b_{n+1}\,V_n - a_{n+1}\,V_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{25 bis}$$

avec

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{2}z & a_2 = \frac{1}{6}z \\ a_3 = \frac{2}{6}z & a_4 = \frac{2}{10}z \\ a_5 = \frac{3}{10}z & a_6 = \frac{3}{14}z \\ a_7 = \frac{4}{14}z & \cdots \\ \cdots & \end{array}$$

et, en général,

$$a_n = \frac{\frac{n+1}{2}}{2n}\,z\sin^2\frac{n\pi}{2} + \frac{\frac{n}{2}}{2(n+1)}\,z\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = 1.$$

a_n n'étant pas une fraction rationnelle en n (et z) je ne puis appliquer la méthode qui me sert à rechercher les lieux de divergence de la fraction continue.

[1] *Rend. del Circolo math. di Palermo* (loc. cit.).

Or, si $t = \frac{1}{z}$, on a, en général

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ddots}}}} = \cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \ddots}}}}$$

et, vu l'identité

$$t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}}$$

d'où

$$\text{(26)} \qquad \operatorname{Log}(1 + z) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{2} - \cfrac{\cfrac{1 \cdot 1}{2 \cdot 6}}{t + \cfrac{1}{6} + \cfrac{2}{6} - \cfrac{\cfrac{2 \cdot 2}{6 \cdot 10}}{t + \cfrac{2}{10} + \cfrac{3}{10} - \cfrac{\cfrac{3}{10} \cdot \cfrac{3}{14}}{\ddots}}}}$$

fraction continue dont les réduites $\frac{U'_n}{V'_n}$ sont définis par la loi de récurrence

$$a_2 = -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 6}, \quad a_3 = -\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 10}, \quad a_4 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{14}, \ldots,$$

$$b_n = t + \frac{1}{2},$$

$$\text{(26 bis)} \qquad \left| \begin{aligned} & U'_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) U'_n + \frac{n^2}{(4n - 2)(4n + 2)} U'_{n-1} = 0, \\ & V'_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) V'_n + \frac{n^2}{(4n - 2)(4n + 2)} V'_{n-1} = 0, \end{aligned} \right.$$

dont je puis étudier la convergence par les méthodes précitées: *la convergence a lieu en tous les points du plan de la variable z, sauf sur la coupure allant, sur ox, du point -1 à $-\infty$.*[1]

[1] *Rend. del Circolo math. di Palermo* (loc. cit.).

L'artifice employé ici a souvent lieu de l'être. Or, il faut remarquer que *les réduites de la fraction continue* (26) *sont les réduites de rang pair de la fraction continue* (25). Nous avons donc simplement prouvé que *la suite des réduites de rang pair de la fraction continue* (25) *converge en tous les points du plan de la variable z, sauf sur la coupure allant sur* ox *du point* -1 *à* $-\infty$.

Il faut prouver qu'il en est de même pour *la suite des réduites de rang impair et que ces deux suites de réduites convergent vers la même limite.*

On a

$$\frac{a_0}{t+\dfrac{a_1}{\lambda}} = \frac{a_0}{t} - \frac{a_0 a_1}{a_1 t + t^2\lambda},$$

$$\frac{t}{t+\dfrac{a_0}{\lambda}} = 1 - \frac{a_0}{a_0 + t\lambda}, \quad \frac{a_1}{t+\dfrac{a_2}{\lambda}} = \frac{a_1}{t} - \frac{a_1 a_2}{a_2 t + t^2\lambda}, \quad 1 + \frac{a_3}{t+\dfrac{a_4}{\lambda}} = 1 + \frac{a_3}{t} - \frac{a_3 a_4}{a_4 t + t^2\lambda}, \text{ etc.} \ldots$$

On peut donc écrire

$$G = 1 - \frac{a_0}{a_0 + t\lambda} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + \cfrac{t a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{t + \cfrac{a_4}{\cdot}}}}} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + \cfrac{t a_1}{t + \cfrac{a_2}{\lambda}}} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + a_1 - \cfrac{a_1 a_2}{a_2 + \lambda t}} =$$

$$1 - \cfrac{a_0}{a_0 + a_1 + t - \cfrac{a_1 a_2}{a_2 + a_3 + t - \cfrac{a_3 a_4}{\cdot}}}$$

fraction continue dont les réduites

$$1, \quad \frac{t}{t + a_0}, \quad \frac{a_1 + t}{a_0 + a_1 + t}, \ldots \text{ ou } 1, \quad \frac{1}{1 + a_0 z}, \quad \frac{a_1 z + 1}{(a_0 + a_1)z + 1}, \ldots$$

sont les réduites d'indice impair de $\cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \cdot}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{\cdot}}}}$;

la loi de récurrence des termes des réduites $\dfrac{U_n''}{V_n''}$ de (25) transformée de cette façon est

$$(26^{\text{ter}})\quad \begin{cases} U''_{n+1} - \left[\dfrac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + t\right] U''_n + \dfrac{n(n+1)}{4(2n+1)^2}\, U''_{n-1} = 0, \\ V''_{n+1} - \left[\dfrac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + t\right] V''_n + \dfrac{n(n+1)}{4(2n+1)^2}\, V''_{n-1} = 0, \end{cases}$$

où il est inutile pour notre objet d'écrire a_1, a_2, b_1, b_2, d'ailleurs aisés à calculer. *Ces réduites convergent*, ma méthode le montre, *en tous les points du plan de la variable* z $\left(z = \dfrac{1}{t}\right)$, *où les réduites* (26^{bis}) *convergent elles-mêmes*.

Reste donc en tout et pour tout à démontrer que

$$\frac{U''_n}{V''_n} - \frac{U'_n}{V'_n}$$

tend vers zéro ou que deux réduites *consécutives* $\dfrac{U_{n+1}}{V_{n+1}}$, $\dfrac{U_n}{V_n}$ de $(25, 25^{\text{bis}})$ tendent vers la même limite.

Soit
$$\lim \frac{U_0}{V_0}, \frac{U_2}{V_2}, \frac{U_4}{V_4}, \ldots, \frac{U_{2n}}{V_{2n}}, \ldots = \lambda,$$
$$\lim \frac{U_1}{V_1}, \frac{U_3}{V_3}, \frac{U_5}{V_5}, \ldots, \frac{U_{2n+1}}{V_{2n+1}}, \ldots = \mu.$$

Entre les relations (25^{bis}) éliminons b_{n+1}; il vient

$$U_{n+1} V_n - V_{n+1} U_n + a_{n+1}(U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n) = 0,$$

ou

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} + a_{n+1}\left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right)\frac{V_{n-1}}{V_{n+1}} = 0.$$

soit $n = 2p$:

$$(27)\qquad \frac{U_{2p+1}}{V_{2p+1}} - \frac{U_{2p}}{V_{2p}} + a_{2p+1}\left(\frac{U_{2p}}{V_{2p}} - \frac{U_{2p-1}}{V_{2p-1}}\right)\frac{V_{2p-1}}{V_{2p+1}} = 0,$$

passons à la limite en remarquant que $\dfrac{U_{2p-1}}{V_{2p-1}}$, $\dfrac{U_{2p+1}}{V_{2p+1}}$ étant des réduites d'indices impairs, on aura (26^{ter})

$$\alpha = \lim \frac{V_{2p-1}}{V_{2p+1}} = \lim \frac{V''_n}{V''_{n+1}},$$

limite facile à calculer puisque (26^{ter})

$$1 - \left[\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{z}\right]\frac{V''_n}{V''_{n+1}} + \frac{n(n+1)}{4(2n+1)^2}\,\frac{V''_{n-1}}{V''_n}\,\frac{V''_n}{V''_{n+1}} = 0,$$

$$1 - \left[1 + \frac{1}{z}\right]\alpha + \frac{1}{16}\alpha^2 = 0; \tag{28}$$

passant dis-je à la limite, (27) s'écrit

$$\mu - \lambda + (\lim a_{2p+1})(\lambda - \mu)\alpha = 0,$$

$$(\mu\lambda)[1 - \alpha \lim a_{2p+1}] = 0; \tag{29}$$

or,

$$a_{2p+1} = \frac{\frac{2p+1+1}{2}}{2(2p+1)} z \sin^2 \frac{(2p+1)\pi}{2} + \frac{\frac{2p+1}{2}}{2(2p+2)} z \cos^2 \frac{(2p+1)\pi}{2}$$

$$= \frac{p+1}{2(2p+1)} z,$$

$$\lim a_{2p+1} = \frac{z}{4},$$

et (29) s'écrit

$$(\mu - \lambda)\left(1 - \frac{1}{4} z \alpha^2\right) = 0,$$

relation qui ne peut *coexister* avec (28) que si $\mu = \lambda$, c. q. f. d.

17. On le voit, l'étude des fractions continues algébriques pose de nombreux problèmes. Nous savons peu de choses encore sur la question du développement d'une fonction en fraction continue, mais ce développement tient à des problèmes précis que j'ai indiqués nettement.

Nous sommes plus avancés en ce qui concerne l'étude de la convergence. La divergence ne peut avoir lieu que sur des coupures, relativement aisées à déterminer. Enfin il est presque démontré directement qu'il y a bien divergence sur ces coupures; de plus, la raison générale de cette divergence est connue.

Quant aux problèmes accessoires qui interviennent ici, j'en ai, me semble-t-il, donné une idée suffisante.

BIBLIOGRAPHIE.

J. A. Barth.

Leipzig 1908.

BUCHHOLZ, H., Das mechanische Potential (nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet) und die Theorie der Figur der Erde zur Einführung in die höhere Geodäsie. T. 1. Mit 137 Textfiguren. — XVI + 470 pp. 8. M. 15— (geh.), M. 16— (geb.).

Die Kräftefunktion. Spezialisierung der Kräftefunktion für das Newton'sche Gravitationsgesetz: das Potential. Die Laplacesche Differentialgleichung für das Potential. Die Poissonsche Diff.-gl. für das Potential. Das Flächenpotential. Das logarithmische Potential. Der Greensche Satz. Das Dirichletsche Prinzip. Theorie der Anziehung der Ellipsoide. Das Potential des »Laplaceschen Sphäroids». — Grundzüge der klassischen mechanischen Theorie der Gestalt der Erde. Geodätische Fundamentalbestimmungen über Entfernungen, Dreiecke und kürzeste Linien auf der Erdoberfläche.

Cambridge University Press.

1907—08.

BAKER, H. F., An introduction to the theory of multiply periodic functions. — XV + 335 p. 8. Sh. 12. 6. d. (cloth).

Hyperelliptic functions of two variables. The reduction of the theory of multiply periodic functions to the theory of algebraic functions.

BALL, R. S., A treatise on spherical astronomy. — XII + 506 p. 8. Sh. 12— (cloth).

Fundamental formulæ. The use of spherical coordinates. The figure of the earth and map making. The celestial sphere. Right ascension and declination; celestial latitude and longitude. Atmospheric refraction. Kepler's and Newton's laws and their application. Precession and nutation. Sidereal time and mean time. The sun's apparent annual motion. The aberration of light. The geocentric parallax of the moon & of the sun. On the transit of a planet across the sun. The annual parallax of stars. Eclipses of the moon & of the sun. Occultations of stars by the moon. Problems involving sun or moon. Planetary phenomena. The generalized instrument. The fundamental instruments of the observatory.

Darwin, G. H., Scientific papers. Vol. 1—2. — XIV + 463, XVI + 516 pp. 8. Sh. 15— (each).

1. Oceanic tides and lunar disturbance of gravity.
2. Tidal friction and cosmogony.

Hardy, G. H., A course of pure mathematics. — XV + 428 p. 8. Sh. 12— (cloth).

Real variables. Functions of real variables. Complex numbers. Limits of functions of a positive integral variable. Limits of funct. of a continuous variable: continuous and discontinuous funct. Derivatives and integrals. Additional theorems in the differential and integral calculus. The convergence of infinite series and infinite integrals. The logarithmic and exponential funct. of a real variable. The general theory of the logarithmic, exponential and circular funct.

Hobson, E. W., The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. — XV + 772 p. 8.

Number. Theory of sets of points. Transfinite numbers and order-types. Functions of a real variable. Integration. Functions defined by sequences. Trigonometrical series.

Leathem, J. G., The elementary theory of the symmetrical optical instrument. (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 8.) — 74 pp. 8. Sh. 2. 6 d.

Mathews, G. B., Algebraic equations (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 6). — 64 p. 8. Sh. 2. 6 d.

Royal Society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. Vol. 1: Pure mathematics. — LVIII + 666 p. 8. Buckram 21 sh. net, half pigskin 27 sh. net.

List of serial publications with the abbreviations of their titles used in the index, and libraries where the serials can be consulted. — Schedule of classification adapted from schedule *A* of the International Catalogue of scientific literature: Philosophy. History. Biography. Periodicals. Reports of Institutions, Societies, Congresses etc. General treatises, text books, dictionaries, tables, collected works. Bibliographies. Tables of mathematical functions. Addresses, lectures, etc., of a general character. Pedagogy. Institutions. Nomenclature. Instruments, including calculating machines. Models. Aids to calculation, graphical processes.

Arithmetic and algebra. Algebra and theory of numbers. Analysis. Geometry.

Sylvester, J. J., The collected mathematical papers. Vol. 2 (1854—1873). With two plates. — XVI + 731 p. 8. Sh. 18—.

Whittaker, E. T., The theory of optical instruments. (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 7.) — VIII + 72 p. 8. Sh. 2. 6 d.

Wright, J. E., Invariants of quadratic differential forms. (Cambridge tracts in mathematics and mathem. physics. No. 9.) — 90 pp. 8. Sh. 2. 6 d.

The Clarendon Press.

Oxford 1908.

Hilton, H., An introduction to the theory of groups of finite order. — XII + 236 pp. 8. Sh. 14— net.

Elements. Permutations. Substitutions. Geometrical elements. Groups. Permutation-groups. Substitution-groups. Groups of movements. Generators of groups. The commutant and group of automorphisms. Prime-power groups. Sylow's theorem. Series of groups. Some well-known groups. Characteristics.

Prem. Tipogr. Enrico Costa.

Sarzana 1908.

Raganti, B., Aritmetica fondamentale. — 332 p. 8. L. 3—.

Wilh. Engelmann.

Leipzig 1905—08.

Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper. Abhandlungen von L. Poinsot (1809), A. L. Cauchy (1811), J. Bertrand (1858), A. Cayley (1859). Übers. u. hrsg. von Robert Haussner. Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen, sowie 4 Figuren auf 2 Tafeln. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 151.) — 128 p. 8. M. 2,80 (geb.).

L. Poinsot, Abhandlung über die Vielecke und Vielflache. — *A. L. Cauchy*, Untersuchungen über die Vielflache. — *J. Bertrand*, Mitteilung zur Theorie der regelmässigen Vielflache. — *A. Cayley*, Über Poinsots vier neue regelmässige Körper. 1—2. — Anmerkungen.

Bolzano, B., Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — Hankel, H., Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Hrsg. von Philip E. B. Jourdain. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 153.) — 115 p. 8. M. 1,80 (geb.).

Galilei, G., Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend. Erster und zweiter Tag (1638). Aus dem Italienischen übersetzt u. hrsg. von Arthur von Oettingen. Zweiter unveränderter Abdruck. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 11.) — 142 p. 8. M. 3— (geb.).

Discurse zwischen den Herren Salviati, Sagredo und Simplicio. Nachwort. Galilei's Widmungsschreiben an den Grafen di Noailles. Anmerkungen.

Jacobi, C. G. J., Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Hrsg. von G. Kowalewski. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 156.) — 227 p. 8. M. 4— (geb.).

KEPLER, JOHANNES, Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. Linz 1615. Aus dem Lateinischen übersetzt und hrsg. von R. Klug. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 165). — 130 pp. 8. M. 2,60 (geb.).

LEIBNIZ, Über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 9 Textfiguren. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 162.) — 84 p. 8. M. 1,60 (geb.).

NEWTON'S Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus dem Lateinischen übersetzt u. hrsg. von Gerhard Kowalewski. (Ostwald's Klassiker . . . Nr. 165). — 66 pp. 8. M. 1,50 (geb.).

Gauthier-Villars.

Paris 1906—08.

ADHÉMAR, R. D', Exercises et lecons d'analyse. — VIII + 208 p. 8. Fr. 6—.

Quadratures. Équations différentielles. Équations intégrales de M. Fredholm et de M. Volterra. Équations aux dérivées partielles du second ordre.

ANNUAIRE pour l'an 1909, publ. par le Bureau des Longitudes. Avec les notices de G. BIGOURDAN. Les étoiles variable, et celle de CH. LALLEMAND, Mouvements et déformations de la croûte terrestre. — VI + 950 p. 16. Fr. 1,50

APPELL, P., et CHAPPUIS, J., Lecons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de mathématiques A et B. Conformément aux programmes de 1905. 2:e éd., entièrement refondue. P. 1—2. — IX + 190, 240 p. 8.

1: Notions géométriques. Vecteurs. Projections. Moments. Cinématique.

2: Cinématique. Dynamique et statique du point. Statique des corps solides libres. Équilibre des corps solides non libres. Machines simples. Travail dans les machines.

ARNOUX, G., Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques, leurs transformation. — XII + 84 pp. 8.

BAIRE, R., Leçons sur les théories générales de l'analyse. T. 2. — X + 347 p. 8.

Fonctions analytiques. Équations différentielles. Applications géométriques. Fonctions elliptiques.

BARBARIN, P., La géométrie non euclidienne. 2:e éd. (Scientia No. 15.) — 91 p. 8. Fr. 2— (cartonné).

BERTRAND, J., Calcul des probabilités. 2[e] éd., conforme à la première. — Enumération des chances. Probabilités totales et probabilités composées. Espérance mathématique. Théorème de Jacques Bernoulli. Démonstrations élémentaires du théorème de Bernoulli. La ruine des joueurs. Probabilité des causes. Loi des erreurs d'observation. Erreurs de situation d'un point. La théorie des moyennes. Combinaison des observations. Les lois de la statistique. Probabilité des décisions. — LVII + 322 p. 8.

BOUTROUX, P., Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre professées au Collège de France. Avec une note de M. Paul Painlevé. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. Emile Borel). 190 pp. 8.

Notions fondamentales. Croissance et allure d'une branche d'intégrale. Classification des points singuliers transcendants. Points singuliers de Briot et Bouquet. Relations entre les singularités transcendantes d'une même équation. Note de M. Paul Painlevé: Sur les équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale n'a qu'un nombre fini de branches.

HERMITE, CHARLES, Oeuvres publ. sous les auspices de l'Académie des sciences par Émile Picard. T. 2. (Avec portrait.) — 520 p. 8. Fr. 18—.

JOUGUET, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. P. 1: La naissance de la mécanique. — X + 210 p. 8.

Un mot sur la mécanique péripatéticienne. Études de statique: Le levier. Le parallélogramme des forces. Le principe du travail virtuel. Études de dynamique: Les premières recherches sur le mouvement. Le choc des corps. Le centre d'oscillation. Conceptions générales.

LAISANT, C. A., La mathématique. Philosophie. Enseignement. 2:e éd., revue et corrigée. — VII + 243 p. 8.

La mathématique pure: La math. et ses subdivisions. L'arithmétique et l'arithmologie. L'algèbre. Le calcul infinitésimal. La théorie des fonctions. La géométrie. La géom. analytique. La mécanique rationnelle. — La mathématique appliquée: Considérations générales. L'appl. du calcul, de la géométrie, de la mécanique. — Enseignement.

LE VAVASSEUR, R., Quelques démonstrations relatives à la théorie des nombres entiers complexes cubiques. Propriétés de quelques groupes d'ordre fini. — 66 p. 8.

MONTESSUS DE BALLORE, R. de, Leçons élémentaires sur le calcul des probabilités. — VI + 191 p. 8.

Philosophie du hasard. — Principes du calcul des probabilités. — Jeux de hasard. — Jeux savants. — La spéculation. — Probabilité géométrique. — Probabilité des causes. — Tir des armes à feu. — Les assurances. — Les sciences morales et économiques.

PETIT BOIS, G., Tables d'intégrales indéfinies. — XII + 154 p. 4.

PICARD, E., Traité d'analyse. (Cours de la Faculté des sciences de Paris). Éd. 2. T. 3: fasc. 1. 336 p. 8.

Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle; des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires.

POINCARÉ, H., La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil. 3:e éd. (Scientia No. 23.) — 97 p. 8. Fr. 2— (cartonné).

Rozé, P., Théorie et usage de la règle à calculs. (Règle des écoles. — Règle Mannheim.) — 118 p. 8. Fr. 3,50.

Sarrette, H., Précis arithmétique des calculs d'emprunts à long terme et de valeurs mobilières. Avec 5 tables financières. — IX + 287 p. 8. Fr. 10—.

Tannery, J., Manuscrits de Evariste Galois. — 67 p. 8.

C. W. K. Gleerups Förlag.

Lund 1908.

Björling, C. F. E., Lärobok i differential-kalkyl och algebraisk analys. 3:e uppl. Med figurer i texten och en tafla. XVI + 367 p. 8. Kr. 10—.

Inledning. Derivator och differentialer. Analytiska tillämpningar af differentialkalkylen. Oändliga algebraiska funktionsformer. Differentialkalkylens tillämpning på den plana geometrien.

G. J. Göschen.

Leipzig 1907—08.

Boehm, K., Elliptische Funktionen. T. 1: Theorie der elliptischen Funktionen aus analytischen Ausdrücken entwickelt. (Sammlung Schubert 30.) — XII + 356 p. 8. M. 8,60 (geb.).

Einfach u. zweifach ausgedehnte abzählbare Mengen; ihre Summen u. Produkte, Untersuchung gewisser aus Partialbrüchen gebildeter zweistrahliger Reihen. Untersuchung gewiss. zweistrahl. Produkte. Grundzüge einer allg. Theorie d. einfach period. Funkt. Untersuch. gewiss. aus Partialbrüchen gebildeter zweifach ausgedehnter Reihen. Die Funkt. $p(u)$ u. $\zeta(u)$. Untersuch. gewiss. Doppelprodukte. Die Funkt. $\sigma(u)$. Arithm. Betrachtungen üb. Kongruenzen kompl. Zahlen. Ellipt. Funkt. Verschiedenartige analyt. Darstellungen d. ellipt. Funkt. Ellipt. Funkt. zweiter u. dritter Art. Weierstrasschen Transzendenten. Zusammenstellung von Lehrsätzen u. Formeln. Die Jacobischen Transzendenten.

Doehlemann, K., Geometrische Transformationen. T. 2: Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen. (Sammlung Schubert 28.) — VIII + 328 p. 8. M. 10—. (geb.)

Quadratische Transformationen allgemeiner Art. Aus den Kreispunkten abgeleitete quadratische Transformationen. Die Kreisverwandtschaft. Die allgemeinen birationalen Transformationen in der Ebene. Quadratisch verwandte Systeme allgemeiner Art. Die aus dem unendlich fernen Kugelkreis abgeleiteten quadratischen Transformationen. Anwendungen der Transformation durch reziproke Radien. Kubische und höhere birationale Raumtransformationen.

Günther, S., & Braunmühl, A. von, Geschichte der Mathematik. T. 1: Günther, S., Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. (Sammlung Schubert 18.) — VIII + 427 p. 8. M. 9,60 (geb.) —.

Heger, R., Analytische Geometrie auf der Kugel. (Sammlung Schubert 54.) — VII + 152 p. 8. M. 4,40 (geb.)

Koordinaten des Punktes u. des Hauptkreises. Gleichung d. Hauptkreises u. d. Punktes. Merkwürdige Punkte u. Hauptkreise d. Kugeldreiecks. Das Kugelviereck u. Kugelvierseit. Der Nebenkreis. Die sphärischen Kegelschnitte. Aufnahme eines sphär. Kegelschn. durch die Seiten u. Ecken eines Dreiecks. Tangente u. Berührungspunkt, Polare u. Pol. eines sphär. Kegelschnittes. Weitere Sätze üb. sphär. Kegelschn. Entwickl. in Gudermanns Achsenkoordinaten. Projektive Hauptkreisbüschel u. Punktreihen. Sphär. Kurven dritter Ordn. Tangenten u. Polaren an spähr. Kurven dritter Ordn. —

Junker, Fr., Höhere Analysis. T. 2: Integralrechnung. Dritte, verbesserte Aufl. (Samml. Göschen 88.) — 190 p. 8. M. 0,80 (geb.)

Netto, E., Gruppen- und Substitutionentheorie. (Sammlung Schubert 55.) — VIII + 175 p. 8. M. 5,20 (geb.)

Grundbegriffe der Gruppentheorie. Das Cayleysche Quadrat. Teiler einer Gruppe. Isomorphismus. Transformation und Vertauschbarkeit. Zusammengesetzte Gruppen. Abelsche Gruppen. Sätze von Sylow u. von Frobenius. Auflösbare Gruppen. Substitutionengruppen. — Transitivität. Substitutionen-gruppen. — Primitivität. Substitutionen-gruppen. Gruppen höchster Ordnungen bei gegebenem Grade. Analytische Darstellung der Substitutionen. Die lineare Gruppe.

Schubert, H., Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Kleine Ausgabe. 3. Aufl. — 306 p. 8. M. 5—. (geb.)

Schubert, H., Niedere Analysis. T. 1. Aufl. 2. (Samml. Schubert 5.) — 181 p. 8. M. 3,60 (geb.)

Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und Diophantische Gleichungen.

Valentiner, S., Vektoranalysis. (Samml. Göschen 354.) — 163 p. 8. M. 0,80 (geb.)

Rechnungsregeln der Vektoranalysis. Anwendungen in einigen physikalischen Gebieten. Lineare Vektorfunktionen u. Dyadenrechnung.

Weitzenböck, R., Komplex-Symbolik. Eine Einführung in die analytische Geometrie mehrdimensionaler Räume. (Sammlung Schubert 57.) — VI + 191 p. 8. M. 4,80 (geb.).

Die Komplexe im dreidimensionalen Raume. Systeme von linearen Kompl. Die quadratischen Kompl. Die linearen Kompl. im vierdimensionalen Raume. Die linearen Kompl. im R_5. Der Geradenkomplex im R_n. Der R_5 als Komplexraum. Die analytische Geometrie.

Wieleitner, H., Spezielle ebene Kurven. (Sammlung Schubert. 56.) — XVI + 409 p. 8. M. 12— (geb.).

Kissoiden. Konchoiden. Weitere Kurven mit einfacher kinematischer Erzeugung. Rouletten, insbesondere zyklische Kurven. Die Methode der Koordinatenverwandlung.

Gyldendalske Boghandel.

Köbenhavn og Kristiania 1908.

NIELSEN, NIELS,. Lærebog i elementær funktionsteori. Forelæsninger holdte ved Köbenhavns universitet. —173 p. 8.

H. 1: Funktioner af reelle variable.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Hannover 1908.

KIEPERT, L., Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. T. 2: Integral-Rechnung. 9-te verbesserte u. vermehrte Aufl. — XXIII + 737 p. 8.

Allgemeine Begriffe und Fundamentalsätze der Integral-Rechnung. Integration durch Substitutionen. Integration durch Zerlegung. Partielle Integration. Quadratur der Kurven. Kubatur der Rotationskörper. Rektifikation der ebenen Körper. Komplanation der Rotationsflächen. Rektifikation der Raumkurven. Integration der gebrochenen rationalen Funktionen. Integration der irrationalen Funktionen. Theorie der bestimmten Integrale. Kubatur der Körper und Komplanation der krummen Oberflächen. Mehrfache Integrale. Integration der Differentiale der Funktionen von mehreren veränderlichen. Theorie der gewöhnlichen Diff.-Gleichungen 1. Ordn. Gewöhnliche Diff.-Gl. höherer Ordn. Lineare Diff.-Gl. m^{ter} Ordn. Simultane Diff.-Gl. Näherungsmethoden zur Integration gewöhnlicher Diff.-Gl.

A. Hermann.

Paris 1905—09.

ANDOYER, H., Cours d'astronomie. (Faculté des sciences de Paris.) P. 1—2. 221 + 304 p. 8. Fr. 9 & 10.

1. Trigonométrie sphérique. La terre. Coordonnées astronomiques. Temps. Changement de coordonnées. Mouvement diurne. Réfraction astronomique. Parallaxe. Aberration. Notions de mécanique céleste. Précession et nutation. Positions apparentes des astres. Mouvement du soleil. Temps. Mouvement géocentrique des planètes. Mouvement de la lune et des satellites. Eclipses.

2. Principes de calcul. Interpolation. Tables. Erreurs d'observation. Méthode des moindres carrés. Instruments accessoires. Instr. complet. Instr. divers. Détermination des constantes fondamentales de l'astronomie. Astronomie géographique et nautique.

BALL, W. W. ROUSE, Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes. 2:e éd. française enrichie de nombreuses additions par J. Fitz-Patrick. P. 1—2. 355 + 363 pp. 8. Fr. 5— (par vol.)

1: Arithmétique, algèbre et théorie des nombres.

2: Questions de géométrie. Questions de mécanique. Questions diverses. Carrés magiques. Problèmes des tracés continus. Trois problèmes de géométrie. Equation du 3e degré.

DUHEM, P., Les origines de la statique. T. 1—2. — IV + 360, VIII + 364 p. 8.

1: Aristote et Archimède. Léonard de Vinci. Jérom Cardan. L'impossibilité du mouvement perpétuel. Les sources alexandrines de la statique du moyen âge. La statique du moyen âge. Jordanus de Nemore. L'école de Jordanus. La statique du moyen âge et Léonard de Vinci. L'école de Jordanus au XVIe siècle. La réaction contre Jordanus. Galileo Galilei. Simon Stevin. La statique française. Roberval. René Descartes.

2: Les propriétés mécaniques du centre de gravité, d'Albert de Saxe à Evangelista Torricelli. La doctrine d'Albert de Saxe et les géostaticiens. La coordination des lois de la statique. Conclusion.

FABRY, E., Traité de mathématiques générales à l'usage des chimistes, physiciens, ingénieurs et des élèves des facultés des sciences. Avec une préface de G. Darboux. — X + 440 p. 8. Fr. 9—.

Algèbre. Géometrie analytique. Analyse. Mécanique.

LAPLANCHE, G. DE, Etude sur les angles imaginaires. — 135 p. 8. Fr. 3—.

WORMS DE ROMILLY, P., Sur les premiers principes des sciences mathématiques. — 51 p. 8. Fr. 2,50.

Ulrico Hoepli.

Milano 1907.

PINCHERLE, S., Algebra complementare. Ed. 2. P. 1—2. (Manuali Hoepli 141, 145). — VIII + 174 & 169 p. 16. L. 3—.

P. 1: Analisi algebrica.
P. 2: Teoria delle equazioni.

Macmillan & Co., Ltd.

London, New York 1907—08.

BÔCHER, M., Introduction to higher algebra. Prepared for publication with the coöperation of E. P. R. Duval. — XI + 321 pp. 8. Sh. 8— net.

Polynomials and their most fundamental properties. A few properties of determinants. The theory ef linear dependence. Linear equations. Some theorems cencerning thé rank of a matrix. Linear transformations and the combination of matrices. Invariants. First principles and illustrations. Bilinear forms. Geometric introduction to the study of quadratic forms. Quadratic forms. Real quadr. forms. The system of a quadr. form and one or more linear forms. Pairs of quadr. forms. Some properties of polynomials in general. Factors and common factors of polynomials. General theorems on integral rational invariants. Symmetric polynomials. Polynomials symmetric in pairs of variables. Elementary divisors and the equivalence of λ-matrices. The equivalence and classification of pairs of bilinear forms and of collineations. The equivalence and classification of pairs of quadr. forms.

Campbell, D. F., A short course on differential equations. — VI + 123 p. 8.

Osgood, W. F., A first course in the differential and integral calculus. — XV + 423 p. 8.

Differentiation of algebraic functions. General theorems. Applications. Differentiation of transcendental functions. Infinitesimals and differentials. Integration. Curvature. Evolutes. The cycloid. Definite integrals. Mechanics. The law of the mean. Indeterminate forms. Convergence of infinite series. Taylor's theorem. Partial differentiation. Applications to the geometry of space. Taylor's theorem for functions of several variables. Envelopes. Double integrals. Triple integrals. Approximate computations. Hyperbolic functions.

Papers, mathematical, for admission into the royal military academy and the royal military college for the years 1897—1906 ed. by E. J. Brooksmith. — 8:o. Sh. 6—.

— —, for the years 1898—1907 ed. by E. J. Brooksmith and R. M. Milne. — 8:o. Sh. 6—.

Mayer & Müller.

Berlin 1908.

Prang, C., Determinanten. 2 Aufl. — 65 p. 8.

1: Hauptsätze über Determinanten.

2: Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes unter Anwendung der Determinanten.

The Open Court Publishing Company.

Chicago 1908.

Andrews, W. S., Magic squares and cubes. With chapters by Paul Carus, L. S. Frierson, C. A. Browne, Jr., and an introduction by Paul Carus. — VI + 199 pp. 8.

Magic squares. Magic cubes. The Franklin squares. Reflections on magic squares. A mathematical study of magics squares. Magic squares and Pythagorean numbers. Some curious magic squares and combinations. Notes on various constructive plans by which magic squares may be classified. The mathematical value of magic squares.

Carus, P., The foundations of mathematics. A contribution to the philosphy of geometry. — IV + 141 p. 8.

The search for the foundations of geometry: historical sketch. The philosophical basis of mathematics. Mathematics and metageometry.

White, W. F., A scrap-book of elementary mathematics. Notes, recreations, essays. — 248 p. 8.

Puttkammer & Mühlbrecht.

Berlin 1907.

Küttner, W., Die steigende Rente in der Volksversicherung mit Berücksichtigung der Bestimmungen des neuen Preussischen Knappschaftsgesetzes. — 27 p. 8. M. 1—.

Julius Springer.

Berlin 1908.

Nölke Friedr., Das Problem der Entwicklung unseres Planetensystems. Aufstellung einer neuen Theorie nach vorhergehender Kritik der Theorien von Kant, Laplace, Poincaré, Moulton, Arrhenius, u. a. — XII + 216 p. 8. M. 6—.

B. G. Teubner.

Leipzig und Berlin 1908.

B. G. Teubner's Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuch für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kræpelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner sowie einem Anhange Unterhaltungsliteratur enthaltend. 101 Ausgabe. — CXXXI + 392 u. 92 p. 8.

Schlesinger, L., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. — X + 333 p. 8.

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1907.

Kuenen, J. P., Die Zustandsgleichung der Gase und Flüssigkeiten und die Kontinuitätstheorie. (Die Wissenschaft. Samml. naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien. H. 20.) — X + 241 p. 8. M. 6,50 (geh.), 7,10 (geb.).

Kondensationserscheinungen und Kontinuitätsprinzip. Kinetische Theorie idealer Gase. Kinetische Theorie unvollkommener Gase: Zustandsgleichung. Erklärung d. Verflüssigungserscheinungen nach der Zustandsgleichung; Erweiterung d. Kontinuitätstheorie. Anormale Kondensations- u. kritische Erscheinungen. Vergleich d. Zustandsgleichung mit der Erfahrung. Molekulare Dimensionen. Gesetz d. korrespond. Zustände. Gleichförmigkeitsprinzip. Verbesserung der Zustandsgleichung. Mathematische Methoden der Herleitung der Zustandsgleichung.

Ad. Wesmael-Charlier.

Namur 1904

Mandart, H., Cours de géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques.)

Du point, de la droite et du cercle. Lignes du deuxième degré. Théorie générale des coniques. Coordonnées trilinéaires homogènes. — VIII + 574 p. 8. Fr. 10—.

John Wiley & Sons.

New York 1907.

Chandler, G. H., Elements of the infinitesimal calculus. 3 ed. — VI + 319 pp. 8. $ 2 — (cloth.)

Johnson, W. W., A treatise on the integral calculus founded on the method of rates. — XIV + 440 pp. 8. $ 3 — (cloth.).

Elementary methods of integration. Geometrical applications. Double and triple integrals. Mean values and probabilities. Definite integrals. Functions of the complex variable.

Nicola Zanichelli.

Bologna 1909.

Pincherle, S., Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna. P. 2: Teoria delle equazioni — 356 p. 8. L. 10—.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES HYPERELLIPTIQUES

PAR

MM. FEDERIGO ENRIQUES ET FRANCESCO SEVERI
à BOLOGNA à PADOVA

couronné par l'Académie des Sciences de Paris (1907).

I. Introduction.

1. On appelle *surface hyperelliptique* toute surface algébrique

$$F(x, y, z) = 0$$

qui admet une représentation paramétrique par des *fonctions uniformes quadruplement périodiques* de deux variables

$$(1) \qquad x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

D'après un théorème classique de WEIERSTRASS, on peut construire une surface hyperelliptique F de la façon suivante:

Soient x, y, z trois fonctions analytiques uniformes indépendantes de u, v ayant le caractère de fonctions rationnelles pour toute valeur finie de u, v; si ces fonctions sont quadruplement périodiques aux mêmes périodes, elles seront toujours liées par une équation algébrique

$$F(x, y, z) = 0.$$

Si au lieu de *trois* fonctions quadruplement périodiques, on en considérait $r > 3$, on aurait analoguement une surface hyperelliptique de l'hyperespace S_r, à r dimensions; celle-ci se ramenerait d'ailleurs par une projection à une surface de l'espace ordinaire.

Si, étant donnée une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

on choisit trois (ou plusieurs) fonctions rationnelles indépendantes

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z), \qquad Z = Z(x, y, z),$$

celles-ci seront liées par une nouvelle équation algébrique

$$\Phi(X, Y, Z) = 0,$$

qui représente, ainsi que $F = 0$, une surface hyperelliptique. On peut exprimer cette remarque en disant que »si une surface Φ admet une transformée rationnelle hyperelliptique (F), elle est elle-même hyperelliptique».

En considérant en particulier le cas où la substitution rationnelle soit invertible (par des fonctions rationnelles), on a que »toute transformée birationnelle d'une surface hyperelliptique est elle-même hyperelliptique».

Au point de vue des problèmes dont nous nous occuperons, deux surfaces liées par une correspondance birationnelle nous apparaîtront comme deux surfaces identiques, en tant qu'elles correspondent au même corps de fonctions abéliennes. Ainsi, dans la suite, nous considérerons toujours une surface donnée comme une image projective de la classe à laquelle elle appartient; c'est-à-dire qu'il sera permis de remplacer cette image par une autre quelconque de ses transformées birationnelles.

2. *Premiers caractères des surfaces hyperelliptiques: le diviseur.*

D'après le théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes,[1] étant données les fonctions

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v),$$

on peut ramener leurs *périodes primitives à un tableau normal* de la forme

$$(2) \qquad \left| \begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix} \right.$$

où δ est un entier positif. Cette réduction peut être effectuée par des substitutions linéaires, d'une infinité de manières différentes. Mais on est toujours amené au même valeur de δ. C'est ce que nous allons démontrer. Soit:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix}$$

un tableau quelconque de périodes primitives des f; on a la relation bilinéaire à coefficients entiers:

$$(3) \qquad \sum_{i,\varkappa} c_{i\varkappa}\alpha_i\beta_\varkappa = 0 \qquad (c_{ii} = 0, \ c_{i\varkappa} = -c_{\varkappa i}).$$

[1] Voir les travaux généraux de Weierstrass et de MM. Poincaré et Picard concernant les fonctions abéliennes de genre p; voir en particulier pour $p = 2$ le mémoire classique de M. Appell (Journal de Math., 1891) et la note recente de M. Painlevé (Comptes rendus).

Lorsqu'on veut construire un tableau normal de périodes, on commence à transformer les périodes au moyen d'une transformation linéaire d'ordre 1, telle que la relation bilinéaire entre les périodes transformées

$$\begin{matrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 & \beta'_4 \end{matrix}$$

ait la forme normale:

$$\alpha'_1\beta'_3 - \beta'_1\alpha'_3 + \delta(\alpha'_2\beta'_4 - \beta'_2\alpha'_4) = 0$$

1, δ étant les *diviseurs élémentaires* de la forme (3). On prend ensuite de nouvelles variables

$$\lambda_0 u + \mu_0 v, \qquad \lambda_1 u + \mu_1 v,$$

où les constantes λ, μ sont déterminées de telle sorte que

$$\begin{matrix} \lambda_0\alpha'_1 + \mu_0\beta'_1 = 1 & \qquad \lambda_1\alpha'_1 + \mu_1\beta'_1 = 0 \\ \lambda_0\alpha'_2 + \mu_0\beta'_2 = 0 & \qquad \lambda_1\alpha'_2 + \mu_1\beta'_2 = \dfrac{1}{\delta}. \end{matrix}$$

Ainsi le nombre δ vient dépendre seulement des diviseurs élémentaires de la forme (3). Comme deux systèmes différents de périodes *primitives* sont toujours liées par une transformation linéaire d'ordre 1, d'après un théorème bien connu de WEIERSTRASS, les formes bilinéaires relatives à ces systèmes, auront les mêmes diviseurs élémentaires; ainsi la valeur de δ est la même quel que soit le système de périodes primitives dont on part, tant que ces périodes ne sont pas liées par des relations singulières à coefficients entiers.

Nous venons de prouver que, *pour des périodes arbitraires*, la réduction des périodes primitives des fonctions f à la forme normale, nous amène à un tableau (2) où *l'entier δ résulte défini sans ambiguité par rapport aux fonctions f*; ce nombre entier est donc un caractère du système de fonctions abéliennes données; nous l'appelerons le *diviseur* de ces fonctions.

Nous dirons aussi qu'une surface F est une *surface hyperelliptique de diviseur* δ, lorsqu'elle admet une représentation paramétrique par des fonctions abéliennes de diviseur δ.

3. *Le rang.* Soit encore un système de fonctions abéliennes

$$(1) \qquad x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v).$$

Un autre caractère de ce système peut être défini de la façon suivante:

A tout point (x,y,z) de la surface F il peut correspondre ou bien un seul couple $u,v)$, ou bien $r > 1$ couples (u,v), incongrus par rapport aux périodes primitives des fonctions f.

Dans le premier cas il y a une correspondance biunivoque entre les points de la surface F et les points (u, v) intérieurs à un prismatoïde de périodes primitives; dans le second cas au contraire on a qu'à tout point (x,y,z) de F correspondent $r > 1$ points intérieurs à ce prismatoïde.

Le nombre $r (\geq 1)$ des points (u,v) intérieurs au prismatoïde des périodes, qui correspondent à un même point (x,y,z) de F, sera désigné dans la suite sous le nom de *rang du système de fonctions* f; on dira aussi que la *surface F est hyperelliptique de rang* r.

4. *Surfaces rationnelles et réglées elliptiques.*

D'après les définitions que nous venons de poser, toute surface rationnelle et de même toute surface réglée elliptique, peut être considérée comme une surface hyperelliptique, et cela de différentes façons.

On peut considérer une surface rationnelle (ou une réglée elliptique) F comme un cas de dégénérescence des surfaces hyperelliptiques de rang 1; mais on peut aussi exprimer les coordonnées des points de F par des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*, formant un système *de rang* > 1.

Dans la suite nous laisserons de côté les surfaces rationnelles et celles qui peuvent être transformées en des réglées elliptiques: *le nom de surfaces hyperelliptiques ne sera donc pas appliqué aux surfaces de ces familles,* tout au moins lorsqu'il s'agira de surfaces que l'on se donnera à priori.

5. *La surface de Jacobi.*

Dans la théorie des surfaces hyperelliptiques joue un rôle fondamental la *surface que l'on construit* de la façon suivante: Soit

$$f(\xi,\eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$$

une courbe de genre deux, et soient (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) deux points variables de f; posons

$$(1) \qquad x = \xi_1 + \xi_2, \qquad y = \xi_1\xi_2, \qquad z = \eta_1 + \eta_2.$$

D'après le théorème d'inversion de Jacobi, le point (x, y, z) décrit une surface hyperelliptique

$$F(x, y, z) = 0,$$

dont l'équation s'obtient en éliminant ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 entre les (1) et les

$$f(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0.$$

A chaque couple de points de la courbe f correspond par les formules (1) un point de la surface F, et réciproquement.

La surface F, ou toute transformée birationnelle de celle-ci, dont les points correspondent (élément par élément) aux couples de points d'une courbe de genre deux, sera désignée dans la suite sous le nom de *surface de Jacobi*.

Remarque. La courbe de genre deux peut dégénérer en se réduisant à un couple de courbes elliptiques; on tombe alors sur la *surface de Jacobi particulière* qui représente les couples de points de ces courbes.

Il y a aussi d'autres dégénérescences possibles de la courbe f, mais ces cas amènent aux surfaces hyperelliptiques dégénérescentes (surfaces rationnelles et réglées elliptiques) que nous venons d'exclure de notre étude (n. 4)

6. *Transformées rationnelles d'une surface hyperelliptique.* Le rôle qui est joué par la surface de Jacobi dans la théorie des surfaces hyperelliptiques, ressortira du théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique admet une transformée rationnelle qui est une surface de Jacobi.

Considérons la surface hyperelliptique Φ qui est représentée par les formules

$$x = f_1(u,v), \qquad y = f_2(u,v), \qquad z = f_3(u,v), \tag{1}$$

et supposons d'avoir effectuées d'avance sur u, v les substitutions linéaires qui ramènent les périodes des fonctions abéliennes f_1, f_2, f_3 au tableau normal

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g', \end{matrix}\right. \tag{2}$$

où le diviseur δ sera un entier positif (n. 2). Entre les parties imaginaires g_1, h_1, g'_1, de g, h, g' on aura l'inégalité

$$g_1 g'_1 > h_1^2. \tag{3}$$

En désignant par $r (\geq 1)$ le rang des fonctions (1), on aura qu'à un point quelconque (x, y, z) de Φ correspondent r couples (u, v) incongrus par rapport aux périodes (2), soit

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots (u_r, v_r). \tag{4}$$

Par rapport au tableau (2) ces couples ne sont pas distincts des couples

$$\left\{\begin{matrix} \left(u_1, v_1 + \frac{\varkappa}{\delta}\right), \left(u_2, v_2 + \frac{\varkappa}{\delta}\right), \ldots \left(u_r, v_r + \frac{\varkappa}{\delta}\right), \\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, \delta - 1). \end{matrix}\right. \tag{5}$$

Mais, toutefois, les couples (4), (5), qui sont au nombre de $n = r\delta$, sont distincts par rapport au tableau

$$(6) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Ceci posé, nous allons construire une surface de Jacobi F, en partant d'une courbe f de genre deux dont les intégrales de première espèce aient les périodes normales (6); nous sommes assurés que cette courbe existe d'après l'inégalité (3).

En désignant par $\omega_1(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ les intégrales considérées de f, sommons les valeurs que ω_1, ω_2 prennent en deux points (ξ_1), (ξ_2) de f; on peut regarder ces sommes comme des fonctions du point (X) de la surface F, qui correspond au couple $(\xi_1), (\xi_2)$ de f.

Soit:

$$u(X) = \omega_1(\xi_1) + \omega_1(\xi_2), \qquad v(X) = \omega_2(\xi_1) + \omega_2(\xi_2).$$

Les fonctions u, v seront deux intégrales simples de première espèce attachées à la surface F, et elles auront les périodes primitives (6).

Les coordonnées d'un point de F seront des fonctions uniformes quadruplement périodiques de u, v ayant les périodes (6).

Or, entre les points de la surface Φ et ceux de F il y a une correspondance $[1, n]$ de façon qu'à un point (x) de Φ répondent n points (X) de F, donnés par les couples (4), (5).

Etant donné un point (X) de F, on a un couple (u, v) par rapport au tableau des périodes (6) et à fortiori par rapport à (2); ainsi par les formules (1) à (X) répond un point (x) de Φ qui résulte une fonction rationnelle de (X).

La surface Φ admet donc une transformée rationnelle qui est la surface de Jacobi F. La proposition énoncée se trouve ainsi justifiée.

Remarque. On reconnaît en cette proposition une expression géométrique du théorème fondamental d'après lequel toute fonction abélienne est une fonction rationnelle des séries Θ.

La propriété que nous venons d'établir peut être énoncée d'une autre façon.

Entre la surface hyperelliptique donnée Φ et la surface de Jacobi F nous avons trouvé une correspondance $[1, n]$ de sorte qu'à un point de Φ répond un groupe G_n de n points de F. Les groupes G_n qu'on obtient sur F en variant le point homologue de Φ, forment une série algébrique ∞^2 qui jouit de la propriété suivante: chaque point de F appartient à *un* groupe de la série, les points du groupe jouant un rôle symétrique par rapport à la détermination de celui-ci.

On exprime cette propriété en disant que les groupes G_n forment sur F une *involution* I_n *d'ordre* n. On dira aussi que Φ (ou toute autre surface en correspondance birationnelle avec celle-ci) *représente* l'involution I_n, ou qu'elle en est une *image*.

Ces définitions établies, notre résultat peut être exprimé en disant que »toute surface hyperelliptique correspond à une involution I_n appartenant à une surface de Jacobi».

On peut même préciser cet énoncé en tenant compte de la valeur de n; en effet nous avons trouvé

$$n = r\delta,$$

r et δ désignant respectivement le rang et le diviseur de la surface hyperelliptique donnée.

Nous aurons donc le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique de diviseur δ et de rang r correspond à une involution d'ordre $r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi; la surface donnée est une image de l'involution.

En particulier: *Toute surface hyperelliptique de diviseur et de rang 1 est une surface de Jacobi.*

On a aussi:

Toute surface hyperelliptique de rang r et diviseur δ, correspond à une involution d'ordre r appartenant à une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

II. Les surfaces hyperelliptiques de rang 1.

7. Les surfaces hyperelliptiques de rang I ont été étudiées par M. Picard comme des surfaces admettant un groupe permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, c'est pourquoi elles ont reçu le nom de *surfaces de Picard.*

Aux propriétés découvertes par M. Picard, M. Humbert a ajouté une étude approfondie de ces surfaces, de façon qu'on en possède maintenant une théorie qui peut être regardée comme complète sous plusieurs points de vue.

Cependant il ne paraîtra pas inutile que nous nous arrêtons à rappeler en ce chapitre les théorèmes fondamentaux qui constituent cette théorie, en les rapprochant au point de vue géométrique, auquel nous nous placerons souvent dans la suite de ces recherches; nous aurons occasion ainsi d'ajouter aux résultats connus quelques résultats nouveaux, qui nous ne semblent pas dépourvus d'interêt.

Nous nous proposons d'abord de construire toutes les surfaces de Picard en partant de la surface de Jacobi (n^{os} 11, 12). Cette construction mettra simplement en lumière les propriétés fondamentales qu'on peut considérer comme caractéristiques pour notre famille de surfaces (n^{os} 13, 14, 16). Enfin elle nous amenera à reconnaître les types, birationnellement distincts, de surfaces hyperelliptiques de rang 1, en classifiant celles-ci d'après leur diviseur δ (n. 30).

8. *Transformations de la surface de Jacobi en elle-même.*

Reprenons la surface de Jacobi F que nous avons définie au n. 5; elle est représentée par les équations

$$x = \xi_1 + \xi_2, \qquad y = \xi_1 \xi_2, \qquad z = \eta_1 + \eta_2,$$
$$f(\xi_1, \eta_1) = 0, \qquad f(\xi_2, \eta_2) = 0,$$

en désignant par $f(\xi, \eta) = \eta^2 - \varphi(\xi) = 0$ une courbe de genre deux.

Ainsi que nous l'avons rappelé, la surface F possède deux intégrales simples de première espèce que l'on obtient en sommant les valeurs des intégrales analogues de f, aux points (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) (voir n. 6).
Or il est bien connu que:

La surface de Jacobi F admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même, qui forment un groupe mixte.

Ces transformations sont représentées par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} u + u' = \text{const.} \\ v + v' = \text{const.} \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} u' - u = \text{const.} \\ v' - v = \text{const.} \end{cases}$$

Les transformations (1) s'appellent des *transformations de première espèce*, les (2) des *transformations de seconde espèce;* ce sont là les deux sortes de transformations qui appartiennent à F pour toute valeur des modules; il peut en exister d'autres seulement pour des valeurs particulières de ces modules, ainsi que nous le verrons dans la suite.

Une transformation de première espèce définit sur F une involution de second ordre, les points homologues étant conjugués par rapport à celle-ci.

Le produit de deux transformations de première espèce est une transformation de seconde espèce.

Deux transformations de 2^{de} espèce engendrent par multiplication une nouvelle transformation de 2^{de} espèce; cela revient à dire que les transformations de 2^{de}

espèce forment, à elles seules, un *groupe continu* qui est un sous-groupe du groupe mixte renfermant toutes les tranformations (1), (2) de F.

A l'égard de la multiplication des transformations de F ajoutons que: *les transformations de 2^{de} espèce sont deux à deux permutables entr'elles.*

Il n'en est plus ainsi généralement pour deux transformations de première espèce.

Enfin rappelons que:

Etant donnés sur F deux points (x), (x'), il existe deux transformations de notre groupe mixte qui font correspondre au premier point le second; l'une de celles ci est une transformation de première espèce, l'autre une transformation de seconde espèce.

Remarque I. Si une transformation de seconde espèce

$$\left|\begin{array}{l} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{array}\right.$$

ramène en lui-même un point de la surface, les équations de la transformation seront satisfaites pour $u' = u$, $v' = v$. Il faudra donc que l'on ait $\lambda = \mu = 0$, c'est-à-dire que la transformation soit *l'identité*. Donc:

Une transformation de seconde espèce qui ne soit pas l'identité n'admet aucun point de coïncidence.

Au contraire une transformation de première espèce

$$\left|\begin{array}{l} u + u' = \lambda \\ v + v' = \mu \end{array}\right.$$

admet toujours 16 points de coïncidence qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1, ω_2 étant un couple de périodes simultanées de u, v.

Remarque II. Faisons une autre remarque utile pour la suite.

Lorsque un point de F se meut sur un cycle linéaire quelconque σ, le point qui lui correspond au moyen d'une transformation de seconde espèce

$$\left|\begin{array}{l} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{array}\right.$$

décrit un cycle σ' homologue à σ. En effet si les paramètres λ, μ aboutissent à zéro par une variation continue, le cycle σ' se réduit au cycle σ.

9. *Transformations de seconde espèce cycliques.*

Tandis que les transformations de première espèce de F sont périodiques (d'ordre 2) il n'en est pas ainsi, en général, pour les transformations de seconde espèce.

Reprenons les équations (2) du n. 8 en les écrivant sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} u' - u \equiv \lambda \\ v' - v \equiv \mu ; \end{cases}$$

et rappelons qu'il est sous-entendu que les congruences se rapportent aux périodes simultanées de u, v. Pour que ces équations représentent une transformation périodique d'ordre n, il faut avoir

$$n\lambda \equiv 0, \qquad n\mu \equiv 0;$$

cela revient à dire que

$$\lambda = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \mu = \frac{\omega_2}{n},$$

ω_1, ω_2 désignant un couple de périodes simultanées de u, v.

On obtient ainsi des transformations de la surface de Jacobi F, qui sont périodiques d'ordre n.

En tenant compte du fait que parmi ces transformations il y en a en général qui sont périodiques d'un ordre diviseur de n, au moyen d'une formule connue de Dedekind on reconnait que: *les transformations périodiques d'ordre n (et non moindre que n) sont au nombre de* $n^4\left(1-\frac{1}{\alpha^4}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^4}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^4}\right)\ldots$ *où α, β, γ, ... désignent les diviseurs premiers de n.*[1]

Remarque. Les transformations périodiques d'ordre n de F en elle-même peuvent être définies de la façon suivante:

Soit G_n un groupe de n points de F et sommons les valeurs des intégrales u, v aux points de G_n; désignons ces sommes par h, k. Il y aura ∞^{2n-2} groupes analogues à G_n qui donnent lieu aux mêmes sommes h, k; ceux-ci formeront une certaine série qu'on pourra désigner par Γ_n. Or parmi les groupes de Γ_n il y en aura un nombre fini (et précisément n^4) qui seront formés par un seul point compté n fois.[2] Eh bien: les transformations périodiques d'ordre n sont définies parmi les transformations de seconde espèce de F, par la propriété de changer un point de coïncidence n-ple de Γ_n en un point analogue.

[1] Voir p. e. Castelnuovo, Rend. dell'Istituto Lombardo, s. II, t. XXV, 1892; nº 8.

[2] Voir p. ex. Castelnuovo, loc. cit.

Considérons une transformation périodique de seconde espèce de F, et ses puissances; on obtient un groupe cyclique de transformations qui sont représentées par les formules:

$$(3)\qquad \begin{cases} u' - u = k\dfrac{\omega_1}{n} \\ v' - v = k\dfrac{\omega_2}{n}, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

où ω_1, ω_2 constituent un certain couple de périodes de u, v. On peut même ramener ces formules à une expression plus simple; en effet par des substitutions linéaires convenables effectuées sur les cycles normaux et sur les intégrales u, v, elles se réduisent à la forme

$$(3')\qquad \begin{cases} u' - u = 0 \\ v' - v = \dfrac{k}{n}. \end{cases}$$

Cette réduction s'effectuera de la façon suivante: désignons par ϱ_2 le cycle de F qui correspond aux périodes ω_1, ω_2 et construisons un système normal de cycles $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, renfermant ϱ_2; il suffira de prendre comme nouvelles variables les intégrales de F qui ont les périodes 1, 0 et 0, 1 le long de ϱ_1, ϱ_2.

Il est bon d'ajouter que la construction du système normal de cycles auquel appartient ϱ_2, peut être effectuée en remarquant que la surface F renferme de courbes C de genre deux (n. 20); il suffit alors de ramener le cycle ϱ_2 à un cycle de la surface riemannienne C et de construire ensuite sur celle-ci les retrosections riemanniennes $\varrho_1 \varrho_2, \varrho_3 \varrho_4$.[1]

10. Opérons sur un point quelconque P de F au moyen des transformations (3) ou (3′) du n. 9; on a ainsi un groupe de points $G_n = (P, P', P'', \ldots P^{(n-1)})$.

Ce groupe est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points; en conséquence au varier de P, il décrit une *involution cyclique d'ordre n* que nous pouvons désigner par I_n. On obtient le nombre des involutions I_n, en divisant le nombre des transformations périodiques d'ordre n par le nombre des transformations qui ramènent en lui-même tout groupe d'une I_n donnée. Ce dernier nombre est évidemment égal à la fonction $\varphi(n)$ de Gauss.

Il y a donc sur F, $n^3\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)\ldots$ *involutions cycliques d'ordre n engendrées par les transformations de seconde espèce* (3), [ou (3′)].

Ces involutions cycliques I_n jouissent des *propriétés suivantes:*

[1] Voir le Traité de MM. Picard et Simart (t. I, p. 86) et les remarques de Severi dans son mémoire publié par les Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 7 Gennaio 1906.

a) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de seconde espèce de F.*

b) *Elles sont transformées en elles-mêmes par les transformations de première espèce de F.*

Cette dernière affirmation a besoin d'être justifiée. Soit ω une transformation cyclique de seconde espèce d'ordre n, qui engendre sur F une involution I_n. Il ne subsiste pas que ω soit transformée en elle-même par une transformation quelconque de première espèce x. Mais en multipliant ω par x, on obtient un groupe fini composé par les $2n$ transformations

$$\omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}, \omega^n \equiv 1$$
$$x, \omega x, \ldots \omega^{n-1} x.$$

Ces transformations donnent lieu à une involution I_{2n} dont chaque groupe est composé par *deux* groupes de I_n, qui sont échangés l'un en l'autre par chacune des transformations de première espèce

$$x, \omega x, \ldots \omega^{n-1} x.$$

Il s'ensuit que I_n est transformée en elle-même par toute transformation de première espèce de F.

c) *Elles n'ont pas des points de coïncidence*, c'est-à-dire que tout point P d'un groupe G_n de I_n est distinct des autres $n - 1$.

En effet un point de coïncidence de I_n serait un point uni pour une transformation de seconde espèce, tandis que ces transformations n'ont pas des points unis (voir la remarque I au n. 8).

11. *Construction des surfaces de Picard de diviseur δ.*

Considérons une involution I_δ engendrée par une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, appartenant à une surface de Jacobi F.

Nous allons démontrer que *toute surface F_δ qui représente l'involution I_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 — c'est-à-dire une surface de Picard de diviseur δ.*

En désignant par u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F, nous considérerons les sommes des valeurs que u, v prennent aux δ points d'un groupe de I_δ; ces sommes divisées par δ seront désignées par U, V.

Alors U, V seront deux intégrales de première espèce attachées à la surface F_δ; il s'agit:

a) de déterminer les périodes primitives de U, V et de montrer que celles-ci sont

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'; \end{matrix}$$

b) de prouver que les coordonnées des points de F_δ s'expriment par des fonctions uniformes de U, V; ces fonctions seront de rang 1, puisqu'en tout point de F_δ les intégrales U, V résultent définies sans ambiguité, aux périodes près.

a) Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les quatre cycles de la surface F qui correspondent aux périodes normales, ce que l'on peut représenter par le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \\ u & 1 & 0 & g & h \\ v & 0 & 1 & h & g' \end{array}$$

On peut supposer que les équations de la transformation périodique qui engendre I_δ soient

$$\begin{array}{l} u' = u + 0 \\ v' = v + \dfrac{1}{\delta} \end{array} \qquad \bmod \begin{vmatrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{vmatrix}$$

(voir n. 9).

Ceci posé considérons les cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ de F_δ, correspondant à $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

On peut évaluer les périodes de U, V le long de ces cycles, en rappelant la remarque II du n. 8; d'après cette remarque au cycle σ'_1 décrit par un point P' de F_δ, correspondent sur F des cycles homologues décrits par les δ points homologues $P_1, \ldots P_\delta$; un de ces cycles a été dejà désigné par σ_1.

On trouve ainsi que les périodes de U, V correspondant aux cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ sont celles représentées par le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma'_1 & \sigma'_2 & \sigma'_3 & \sigma'_4 \\ U & 1 & 0 & g & h \\ V & 0 & 1 & h & g'. \end{array}$$

Mais les cycles $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ de F_δ ne sont pas primitifs; c'est là un point délicat qu'il faut mettre en lumière.

A cet effet remarquons que l'on obtient un cycle de F_δ qui n'est pas une combinaison linéaire de $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_4$ par la construction suivante: Considérons les points $P_1, P_2, \ldots P_\delta$ de F qui correspondent à un même point P' de F_δ. Soit Θ_1 une ligne ouverte joignant P_1 à P_2. Tandis que P_1 décrit cette ligne, P_2 parcourira une ligne Θ_2 qui aboutit à $P_3, \ldots, P_\delta$ une ligne Θ_δ qui aboutit à P_1. Eh bien, au chemin ouvert Θ_1 correspond sur F_δ un cycle fermé Θ'; ce cycle parcouru δ fois correspond au cycle

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_\delta$$

de la surface F.

Evaluons les périodes des intégrales U, V correspondant au cycle Θ' de F_δ. Elles correspondent aux valeurs que les intégrales u, v de F prennent le long de Θ_1; la correspondance $(P_1 P_2)$ étant représentée par les équations

$$u' = u$$
$$v' = v + \frac{1}{\delta},$$

ces valeurs sont respectivement

$$0 \text{ et } \frac{1}{\delta}, \bmod \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Nous sommes arrivés à la conclusion que les intégrales U, V de F admettent les périodes simultanées 0, $\frac{1}{\delta}$ par rapport au cycle Θ'; ce cycle compté δ fois donne le couple de périodes $(0, 1)$ et résulte ainsi homologue à σ'_2.

On voit ainsi, ce que nous avons affirmé, que les périodes

$$\begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases} \tag{1}$$

ne sont pas des périodes primitives pour U, V sur F_δ, puisque ces intégrales admettent les périodes

$$\begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{cases} \tag{2}$$

correspondant aux cycles

$$\sigma'_1, \quad \Theta', \quad \sigma'_3, \quad \sigma'_4. \tag{3}$$

On peut prouver au contraire que les périodes (2) sont primitives. A cet effet il faut montrer que tout cycle de F_δ est homologue à une combinaison linéaire à coefficients *entiers* des cycles (3).

Observons d'abord qu'un système de chemins analogues aux chemins Θ_1, $\Theta_2, \ldots \Theta_\delta$, peut être défini sur F pour tout groupe G_δ de l'involution I_δ, et que le cycle Θ' correspondant aux nouveaux chemins sur F_δ, est homologue au chemin Θ' obtenu auparavant, parce qu'il donne encore les valeurs 0, $\frac{1}{\delta}$ pour les intégrales U, V.

Ajoutons que sur F un chemin allant de P_1 à P_{i-1} $(i = 3, 4 \ldots)$ est homologue à la somme du chemin $\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_i$ et d'un cycle linéaire; par conséquent le chemin fermé qui lui correspond sur F_δ est homologue à la somme de $i\Theta'$ et d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles σ'_1, $\sigma'_2 = \delta\Theta'_1$, σ'_3, σ'_4, c'est-à-dire à une combinaison des cycles $\sigma'_1, \Theta', \sigma'_3, \sigma'_4$.

Comme tout cycle linéaire de F_δ a pour correspondant sur F ou bien un cycle linéaire — qui s'exprime au moyen des cycles $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — ou bien un chemin ouvert joignant deux points conjugués — qui s'exprime au moyen de ces mêmes cycles et des chemins $\Theta_1, \ldots \Theta_\delta$ — on en conclût que tout cycle de F_δ restera homologue à une combinaison à coefficients entiers des cycles

$$\sigma'_1,\ \Theta',\ \sigma'_3,\ \sigma'_4. \tag{3}$$

b) Il s'agit maintenant de montrer que les coordonnées des points de F_δ sont des fonctions uniformes de U, V, c'est-à-dire que U, V ne peuvent reprendre les mêmes valeurs, par rapport aux périodes (2), en des points différents de la surface.

Revenons à la définition des intégrales U, V: elles s'obtiennent en divisant par δ les sommes des valeurs des intégrales u, v attachées à F, aux points d'un groupe de I_δ. On a donc

$$\begin{aligned} U &= u \\ V &= v + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned} \qquad \mathrm{mod} \left|\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'. \end{matrix}\right.$$

Soit U_0, V_0 et U_1, V_1 deux couples de valeurs de U, V, congrus par rapport au tableau (2), et désignons par X_0, X_1 les points correspondants de F_δ; il faut prouver que ceux-ci ne sont pas distincts.

Désignons par x_0 un des δ points de F correspondants à X_0, et par x_1 un des points correspondants à X_1. On aura alors

$$\begin{aligned} U_0 &= u(x_0), & U_1 &= u(x_1) \\ V_0 &= v(x_0) + \frac{\delta - 1}{2\delta}, & V_1 &= v(x_1) + \frac{\delta - 1}{2\delta} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1) \\ v(x_0) &\equiv v(x_1), \end{aligned}$$

les congruences ayant lieu par rapport au tableau (2). Ces relations peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} u(x_0) &\equiv u(x_1) \\ v(x_0) &\equiv v(x_1) + \frac{\varepsilon}{\delta} \end{aligned} \qquad (\varepsilon \text{ entier} < \delta)$$

les nouvelles congruences étant considérées par rapport au tableau (1).

Il s'ensuit que x_0 est amené en x_1 par la transformation

$$u' = u$$
$$v' = v + \frac{1}{\delta},$$

et par conséquent que x_0, x_1 appartiennent à un même groupe de I_δ, ou, enfin, que les points X_0, X_1 ne sont pas distincts.

12. Nous venons de prouver que toute involution cyclique I_δ engendrée sur une surface de Jacobi par une transformation périodique de seconde espèce, est représentée par une surface de Picard. Il est aisé de montrer que, réciproquement, toutes les surfaces de Picard peuvent être obtenues par cette construction.

C'est là une conséquence immédiate de ces faits: a) que par la construction indiquée on obtient des surfaces hyperelliptiques de rang 1 (c'est-à-dire des surfaces de Picard) correspondant à un tableau normal de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix}$$

qui peut être assigné à priori (en satisfaisant à l'inégalité classique); b) que des surfaces de Picard, correspondant à un même tableau, peuvent être transformées birationnellement l'une dans l'autre.

Ainsi on peut résumer les résultats obtenus en énonçant le théorème suivant:

Que l'on se donne une surface de Jacobi F et une transformation périodique de seconde espèce d'ordre δ, de F; l'involution I_δ engendrée sur F par cette transformation, est représentée par une surface F_δ qui est une surface de Picard de diviseur δ.

Réciproquement, toute surface de Picard F_δ de diviseur δ admet comme transformée rationnelle une surface de Jacobi $F (\delta = 1)$, de façon qu'à un point de F_δ correspondent sur F δ points homologues par rapport à une transformation périodique de seconde espèce et à ses puissances.

Remarque. Au lieu de considérer sur F le groupe cyclique engendré par une transformation périodique

$$u' = u$$
$$v' = v + \frac{1}{\delta}.$$

on peut considérer le groupe engendré par deux transformations

$$u' = u \qquad\qquad u' = u + \frac{1}{\delta}$$
$$v' = v + \frac{1}{\delta}, \qquad\qquad v' = v.$$

De même que par le premier groupe cyclique on définit sur F une involution I_δ, d'ordre δ, par ce second groupe on définit sur F une involution I_{δ^2}, d'ordre δ^2. Celle-ci vient représentée aussi par une surface de Picard F'. Mais les intégrales de F' admettent les périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \delta g & \delta h \\ 0 & 1 & \delta h & \delta g' \end{matrix}$$

de façon que F' est une nouvelle surface de Jacobi (de diviseur 1).[1]

Il est intéressant de remarquer que la surface de Picard F_δ correspondant à l'involution I_δ, est une transformée rationnelle de la surface de Jacobi F, et qu'il y a entre F', F_δ une correspondance $[1, \delta]$ sans points de diramation sur F'.

On obtient ainsi une construction des surfaces de Picard, en quelque sorte réciproque à celle que nous avons développée au n. 11: *Toute surface de Picard F_δ de diviseur δ, est une transformée rationnelle d'une surface de Jacobi F, qui correspond à une involution d'ordre δ sur F_δ; ainsi F_δ vient représentée sur une surface de Jacobi comptée δ fois sans points de diramation.*

13. *Les surfaces de Picard considérées comme des surfaces qui admettent un groupe de transformations en elles-mêmes.*

D'après notre construction des surfaces de Picard F_δ (n. 11) les propriétés des involutions I_δ appartenant à une surface de Jacobi (propriétés que nous avons indiquées par a), b) au n. 10) se traduisent en les propriétés suivantes.

Toute surface F_δ hyperelliptique de rang 1, admet deux séries ∞^2 de transformations birationnelles en elles-mêmes, qui seront désignées comme des transformations de première et de seconde espèce. Les transformations de première espèce sont périodiques d'ordre 2; celles de seconde forment un groupe continu de transformations permutables.

D'ailleurs, étant donnée la représentation paramétrique de F_δ par les intégrales U, V, les transformations de première et de seconde espèce de F_δ en elle-même, résultent définies par les formules

[1] Il est essentiel de remarquer que, d'après les nn. 2, 3, le diviseur Δ et le rang r de F' résultent en effet $\Delta = 1$, $r = 1$, et cela parce qu'en ces définitions on se rapporte toujours à des périodes primitives. Il n'en serait pas ainsi si l'on se rapportait aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

car on aurait alors

$$r = \delta^2.$$

Mais ces périodes ne sont pas primitives puisque les intégrales correspondantes admettent les périodes simultanées $\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}$

$$U' + U = \text{const.}$$
$$V' + V = \text{const.}$$

et respectivement

$$U' - U = \text{const.}$$
$$V' - V = \text{const.}$$

de même que dans le cas de la surface de Jacobi (n. 8).

Or M. Picard a établi le théorème suivant:

Toute surface algébrique qui admet un groupe continu permutable ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même, opérant sur les points de la surface d'une manière transitive, est une surface hyperelliptique de rang 1 ou une dégénérescence (surfaces rationnelles ou réglées elliptiques).

C'est même à cause de ce théorème qu'on a donné aux surfaces en question le nom de *surfaces de Picard.*

L'énoncé qui précède ne diffère de celui de M. Picard que par l'introduction du mot »rang», d'après la definition du n. 3.

14. *Sur les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1. Théorème de M. Picard.*

Les surfaces de Picard F_δ jouissent des propriétés suivantes:

a) Il y a *deux* intégrales simples de première espèce attachées à F_δ; nous les avons désignées par U, V.

b) Il y a *une* intégrale double de première espèce

$$\iint dU\,dV,$$

c'est-à-dire que le genre de F_δ est

$$p_g = 1.$$

En désignant par m l'ordre de F_δ il y aura donc une surface adjointe φ_{m-4} d'ordre $m-4$.

c) La surface φ_{m-4} adjointe à F_δ coupe celle-ci, hors de la courbe double, suivant des *courbes exceptionnelles,* qui peuvent manquer, et que l'on peut toujours faire disparaître par une transformation de la surface.

Outre que par le raisonnement analytique de M. Picard, la propriété c) peut être justifiée géométriquement de la façon suivante. On remarquera d'abord qu'elle subsiste pour la surface de Jacobi $F(\delta = 1)$: en effet en se rapportant au modèle défini au n. 5, l'adjointe φ_{m-4} coupera F suivant la ligne exceptionnelle qui correspond à la g_2^1 de la courbe de genre deux, dont F représente les couples. Mais, d'après la construction du n. 11, la même propriété subsistera pour toute F_δ, quel que soit δ; en effet à une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par

son adjointe, répondrait une courbe analogue sur la surface de Jacobi, qui est une transformée rationnelle de F_δ.[1]

Or c'est une circonstance de la plus haute importance que les propriétés a), b), c) des surfaces F_δ suffisent à caractériser la famille de ces surfaces. On a en effet *le théorème de M. Picard* que nous énoncerons sous la forme suivante:

Toute surface d'ordre m et de genre $p_g = 1$, qui possède deux intégrales simples de première espèce et qui n'est pas découpée par son adjointe d'ordre $m-4$ en déhors des courbes exceptionnelles, est une surface hyperelliptique de rang 1.

M. Picard a établi ce théorème en 1885; il est revenu sur le même sujet en 1889 et enfin en 1906 dans le »Traité» écrit en collaboration avec M. Simart.[2]

La dernière démonstration du théorème est particulièrement simple et il suffira de la rappeler ici dans ses grandes lignes; on aura ainsi l'occasion de mettre en lumière explicitement comment les surfaces hyperelliptiques définies par les propriétés a), b), c) peuvent avoir un diviseur $\delta \geq 1$.

En supposant que la surface donnée possède deux intégrales simples de première espèce U, V, celles-ci auront 4 couples de périodes. Effectuons sur ces périodes une substitution linéaire convenable à coefficients entiers, substitution dont le déterminant δ sera ≥ 1, et ajoutons une transformation linéaire sur les intégrales, de façon à ramener les périodes de U, V au tableau

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{matrix}$$

Ce tableau correspond à une surface de Jacobi F, que l'on peut supposer dépourvue de courbes exceptionnelles; et il est aisé de reconnaître que la surface donnée F_δ est une transformée rationnelle de F. F_δ se trouve représentée ainsi sur la *surface F comptée δ fois, sans points de diramation.*

Il en résulte (Remarque au n. 12) que F_δ est une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

Il est à remarquer que la condition c) que nous avons énoncée parmi les propriétés caractéristiques de F_δ, joue un rôle essentiel; si on la laisse tomber, F_δ sera encore représentée sur la surface de Jacobi F comptée δ fois, mais on trouvera sur F une courbe de diramation (qui résultera elliptique) à laquelle correspondra une courbe non exceptionnelle découpée sur F_δ par son adjointe d'ordre $m-4$.

[1] Voir la note à p. 322.

[2] Voir ce Traité, t. II, p. 153—156.

En ce cas F_δ ne serait pas une surface hyperelliptique. Mais on peut démontrer qu'elle serait une surface elliptique, c'est-à-dire une surface douée d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations en elle-même (ENRIQUES).

15. *Rappel de notions appartenant à la théorie des surfaces algébriques.*

Pour achever le tableau des propriétées des surfaces de Picard, il nous conviendra de rappeler quelques notions empruntées à la théorie géométrique des surfaces algébriques.[1]

D'abord on définit pour toute surface les invariants désignés respectivement par p_a, p_g, $P_i (i = 2, 3 \ldots)$. p_a désigne le *genre numérique;* p_g le *genre géométrique;* P_i le *genre d'ordre* $i (P_1 = p_g)$ c'est-à-dire le nombre des courbes i fois canoniques linéairement indépendantes de la surface.

On a ensuite à considérer le *genre linéaire* (virtuel) $p^{(1)}$, c'est-à-dire une certaine expression arithmétique du genre des courbes canoniques; cette expression sera rapportée à la surface elle-même si celle-ci ne renferme pas des courbes exceptionnelles; dans le cas contraire elle sera rapportée à une surface transformée dépourvue de courbes exceptionnelles; d'après MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES cette transformée existe toujours, si la surface donnée n'appartient pas à la famille des réglées.

L'ordre de la courbe canonique d'une surface n'est pas un invariant de celle-ci; mais si, étant $p_g = 1$, cet ordre est égal à zéro (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles), cette propriété est invariant par rapport aux transformations birationnelles.

En ce cas la surface jouit de propriétés remarquables.

Rapportons-nous à une surface de la classe qui soit dépourvue de courbes exceptionnelles; soit m l'ordre de la surface et π le genre des sections planes; on a toujours

$$m = 2\pi - 2.$$

Sous une forme plus générale: Si l'on a sur cette surface un système linéaire $|C|$ de courbes C de genre π, celles-ci se coupent deux à deux en

$$m = 2\pi - 2$$

points (c'est-à-dire que m est le *degré* du système).

Mais on en a davantage: le groupe des m points communs à deux courbes C est un *groupe canonique* sur chacune de ces courbes.

[1] Voir les travaux de M. NÖTHER et de M. ENRIQUES, ou la note expositive de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES qui se trouve à la fin du »Traité des fonctions algébriques de deux variables» de MM. PICARD et SIMART.

C'est ce qu'on exprime en disant que la *série caractéristique* g_m découpée sur une courbe C par les autres courbes du système, est la *série canonique* de C, ou une partie de celle-ci. Si le système $|C|$ appartient à un système continu non linéaire, les courbes infiniment prochaines à C, contenues dans le système, coupent sur C des groupes de la même série caractéristique; c'est de cette façon que M. SEVERI définit la série caractéristique sur C, même dans le cas où le système linéaire $|C|$ ait la dimension égal à zéro.

Une surface de genre $p_g = 1$, dont la courbe canonique a l'ordre zéro, a le genre linéaire $p^{(1)} = 1$; elle ne renferme pas des courbes i fois canoniques, quel que soit i, de sorte que:

$$P_i = 1. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Cette dernière propriété sert à definir la famille des surfaces de genre $p_g = 1$ dont la courbe canonique a l'ordre 0; en effet on a le théorème suivant[1]:

Toute surface dont les genres d'ordre 1 et 4 sont égaux à l'unité

$$(p_g = P_4 = 1)$$

a une courbe canonique d'ordre 0; *le genre numérique de la surface est*

$$p_a = 1 \text{ ou } p_a = -1.$$

16. *Les surfaces de Picard caractérisées par leurs nombres invariants.*

D'après les notions que nous venons de rapporter, on peut transformer le théorème de M. PICARD (n. 14) de la façon suivante:

Rappelons d'abord que le nombre des intégrales de première espèce attachées à une surface, est $p_g - p_a$; c'est là un résultat connu auquel ont amené récemment les recherches établies par M. PICARD d'un côté, par MM. SEVERI, ENRIQUES et CASTELNUOVO de l'autre côté.

Alors les conditions a), b), c) du n. 14 se traduiront par les égalités

$$p_g = 1, \; p_g - p_a = 2, \; P_4 = 1.$$

On aura donc le théorème suivant (qui a été donné par M. ENRIQUES dans le Mémoire cité du Circolo di Palermo):

Les conditions pour qu'une surface soit hyperelliptique de rang 1 sont exprimées par les égalités

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1.$$

[1] Cfr. ENRIQUES, Rendic. del Circolo mat. di Palermo, 1905 e Rendic. Accademia di Bologna, Decembre 1906.

17. *Courbes appartenant à une surface de Picard: courbes rationnelles.*

On a la proposition suivante:

Une surface de Picard ne saurait renfermer une courbe rationnelle qui ne soit pas exceptionnelle.

Soit

$$F_\delta(x, y, z) = 0$$

une surface de Picard d'ordre m.

Il y a deux intégrales simples de première espèce u, v et l'on a

$$du = \frac{B\,dx - A\,dy}{F'_z}, \qquad dv = \frac{B_1 dx - A_1 dy}{F'_z};$$

A, B, A_1, B_1 désignent ici des polynomes liés par l'identité de M. Nöther

$$A B_1 - A_1 B = F'_z \,.\, Q(x, y, z),$$

Q étant le polynome d'ordre $m-4$ adjoint à F_δ.

Or si F_δ renferme une courbe rationnelle E, on a sur E

$$B\ dx - A\ dy = 0,$$
$$B_1 dx - A_1 dy = 0,$$

et par conséquent

$$A B_1 - A_1 B = 0.$$

Mais comme on peut supposer que E n'ait aucune relation particulière avec les axes coordonnés, on en déduit

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Or, en général, Q coupe F suivant une courbe composée de courbes exceptionnelles et de la courbe canonique, qui, en ce cas est d'ordre zéro. D'après la relation précédente on en déduit que E est une courbe exceptionnelle de F_δ, ce qu'il fallait démontrer.

Convention. — Dans la suite en raisonnant de courbes appartenant à une surface F_δ *nous nous rapporterons toujours à des surfaces dépourvues de courbes exceptionnelles* (*n.* 15)*; ces surfaces ne renfermeront donc pas des courbes rationnelles.*

18. *Courbes elliptiques.*

La surface de Picard F_δ peut renfermer une courbe elliptique C; en ce cas C appartient à un faisceau elliptique de courbes analogues, et il y a sur F_δ un second faisceau elliptique de courbes elliptiques.

Supposons que F_δ renferme une courbe elliptique C; si celle-ci appartient à une série continue, le degré de la série sera égal à zéro ($m = 2\pi - 2$); en conséquence C ne saurait appartenir à une série qui ne soit pas un faisceau.

Transformons C par les ∞^2 transformations de seconde espèce de F_δ (n. 13); comme C ne peut admettre que ∞^1 transformations birationnelles en elle-même, on aura ∞^1 courbes transformées de C, qui formeront un faisceau.

Il y aura *une* intégrale simple de première espèce attachée à F_δ, c'est-à-dire une combinaison linéaire $\lambda u + \mu v$ des deux intégrales u, v, qui demeure constante le long des courbes du faisceau; on en déduit que le faisceau est elliptique.

L'intégrale $\lambda u + \mu v$ aura deux périodes distinctes; d'après MM. PICARD et POINCARÉ, à côté de cette intégrale réductible, il y en aura une autre associée, à laquelle correspond un second faisceau elliptique de courbes elliptiques de niveau.

Les deux faisceaux que nous venons de considérer, sont formés par les trajectoires de deux sous-groupes algébriques ∞^1 renfermés dans le groupe des transformations de seconde espèce de F_δ.

Remarque. On voit que la surface de PICARD correspondant à des modules généraux, ne renferme pas des courbes elliptiques.

Parmi les surfaces de Jacobi renfermant des courbes elliptiques, il y a la *surface particulière* dont les points correspondent aux couples de points choisis sur deux courbes de genre un. Cette surface vient caractérisée par la propriété de renfermer *deux faisceaux elliptiques de courbes elliptiques se coupant en un seul point.*

19. *Si une surface de Picard renferme un faisceau irrationnel de courbes, le faisceau est elliptique et les courbes sont de même elliptiques.*

On établit aisément que le faisceau est elliptique, en remarquant qu'il ne peut y avoir qu'*une* intégrale qui demeure constante le long de ses courbes.

On reconnait que ces courbes C sont de genre $\pi = 1$ d'après le n. 15, puisque le faisceau étant irrationnel ne peut avoir des points base (CASTELNUOVO-ENRIQUES), et par conséquent deux courbes C se coupent en $m = 2\pi - 2 = 0$ points.

20. *Courbes de genre deux.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Picard F_δ ne renferme pas en général des courbes elliptiques. Au contraire on construit sur F_δ des courbes de genre deux par le procédé suivant:

Considérons sur F_δ un système linéaire complet de courbes K de genre π; ce système $|K|$, qui est l'adjoint de lui-même, aura la dimension $\pi - 2$ (théorème

de Riemann-Roch pour la surface F_δ); ainsi en imposant aux courbes K de posséder $h = \pi - 2$ points doubles, on obtiendra un nombre fini de courbes de genre deux, renfermées dans le système $|K|$.

Or toute courbe C de genre deux, appartenant à F_δ et douée de h points doubles, est amenée par les ∞^2 transformations de seconde espèce, en ∞^2 courbes birationnellement identiques; nous allons prouver que ces courbes forment un système, que nous désignerons pas Σ_{h+1}, dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque aux points de la surface F_δ.

Comme les points de F_δ correspondent biunivoquement aux transformations du groupe continu qui appartient à la surface (voir le n. 8), il suffira de prouver qu'il y a une seule transformation de seconde espèce amenant une courbe C en un'autre courbe du système Σ_{h+1}; cela revient à dire que: *toute transformation de seconde espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, se réduit à l'identité.*

Soit en effet

$$(r)\begin{cases} u' - u = \lambda \\ v' - v = \mu \end{cases}$$

une transformation de seconde espèce de F_δ qui ramène en elle-même la courbe C. Il s'agit de prouver que

$$\lambda = \mu = 0.$$

Considérons sur C la série canonique g_2^1 et désignons par h, k les sommes des valeurs des intégrales u, v, aux points d'un couple de cette série; les points conjugués par rapport à la g_2^1 seront conjugués par rapport à la transformation de première espèce:

$$(\omega)\begin{cases} u + u' = h \\ v + v' = k. \end{cases}$$

En multipliant les deux transformations on obtient une transformation de première espèce:

$$(r\omega)\begin{cases} u + u' = \lambda + h \\ v + v' = \mu + k. \end{cases}$$

Or, d'après le théorème d'Abel, si λ, μ étaient différents de zéro, les points de C conjugués par rapport à $(r\omega)$ résulteraient conjugués en une nouvelle g_2^1, qui devrait ainsi exister sur C. Mais comme C renferme une seule série linéaire de seconde ordre, qui est la g_2^1 canonique, on en conclut que

$$\lambda = \mu = 0.$$

Remarque. Nous venons de prouver que toute courbe de genre deux sur F_δ, appartient à un système qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de seconde espèce, système birationnellement identique à la surface F_δ.

Il est aisé de reconnaître que ce système est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première espèce. Il suffit à cet effet de rappeler ce que nous avons déjà remarqué, que, étant donnée une courbe de genre deux, C, il y a une transformation de première espèce de F_δ qui laisse invariant la courbe C, et par rapport à laquelle sont conjugués les couples de points de la g_2^1 de C.

21. *Systèmes Σ appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après la construction du n. 5, une surface de Jacobi F, dont les points correspondent aux couples d'une courbe f de genre deux, irréductible, renferme toujours des courbes de genre deux irréductibles qui n'ont pas des points doubles (hors de la courbe double de F).

En effet on obtient sur F une telle courbe, en considérant les ∞^1 couples qui ont un point fixe sur f.

Soit C une courbe de genre deux irréductible et dépourvue de points doubles, tracée sur F. Il y a un système $\infty^2 \Sigma (= \Sigma_1)$ de courbes analogues, auquel C appartient (n. 20); les courbes C se coupent deux à deux en 2 points, (2 est le *degré* de Σ), et la série caractéristique, découpée sur une C par les courbes infiniment prochaines du même système, est la g_2^1 canonique de C (n. 15). Comme cette série est complète, il s'ensuit que le système Σ n'est pas renfermé en un système continu plus ample de courbes du même ordre.

Il est aisé d'évaluer le nombre des courbes C de Σ qui passent par deux points de F; ce nombre, qu'on appelle l'*indice* de Σ, est égal à 2.

En effet la surface F ne saurait pas renfermer un système de degré 2 et d'indice > 2, sans être rationnelle.

C'est là une conséquence d'un théorème bien connu de MM. Humbert et Castelnuovo, que M. Castelnuovo a mis explicitement en lumière.[1]

En résumant les résultats obtenus, on aura le théorème suivant:

Toute surface de Jacobi, correspondant à une courbe de genre deux irréductible, renferme un système $\infty^2 \Sigma$ de courbes de genre deux irréductibles sans points doubles; ce système, qui est transformé en lui-même par les ∞^2 transformations de première et de seconde espèce, a le degré 2 et l'indice 2.

Fait exception la surface de Jacobi particulière renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en un point; c'est la surface correspondant au cas où la courbe de genre deux se décompose en deux courbes elliptiques (n. 5).

[1] Atti della R. Acc. di Torino, 1893.

Remarque. Nous avons vu que, en considérant la surface de Jacobi F qui correspond point par couple à une courbe f de genre deux, on obtient sur F une courbe de genre deux représentant les couples de f qui renferment un même point. On construit de cette façon ∞^1 courbes de genre deux qui ont un point fixe; eh bien, cette série ∞^1 de courbes sera contenue en une série complète ∞^2 qui constituera sur F un système Σ de degré et d'indice 2.

Ainsi que nous le verrons dans la suite, le système Σ obtenu sur F, est le seul système de degré et d'indice 2 appartenant à F, lorsque f a des modules généraux. Pour des modules particuliers il peut y avoir sur F plusieurs systèmes Σ doués des mêmes caractères.

22. Il y a lieu maintenant de montrer que:

L'existence d'un système $\infty^2 \Sigma$ de courbes de genre deux, ayant aussi le degré et l'indice égaux à deux, est une propriété caractéristique de la surface de Jacobi.

En effet si une surface F renferme un tel système Σ de courbes C, il est aisé de construire une courbe de genre deux qui correspond couple par point à F.

Considérons les courbes C passant par un point fixe P de F, et choisissons en particulier une de ces courbes C. Toute C par P coupe C en un point hors de P, et par tout point de C passe une courbe C qui contient aussi P.

Or par un point quelconque de F il passent deux courbes C renfermant P, qui coupent C, hors de P, en deux points; réciproquement étant donnés deux points sur C, ceux-ci détermineront avec P deux courbes C se coupant en un point de F.

De cette façon les points de F viennent correspondre aux couples de points de la courbe C, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Il a été implicitement reconnu, en effectuant la construction précédente, que toute courbe C de Σ est birationnellement identique à la série Γ des C, qui passent par un point P de F.

La correspondance point par couple entre F et Γ est établie de la façon suivante: deux courbes C de Γ se coupent hors de P en *un* point X; réciproquement tout point X appartient à deux courbes C de Γ.

On sait que la variété Γ, de genre deux, renferme une série canonique g_2^1; eh bien, les C de Γ qui forment un couple de cette g_2^1 sont les courbes C *qui ont un contact en P*.

Ainsi la variété Γ vient représentée sur le continuum rationnel constitué par les points infiniment prochains à P à compter deux fois; et il y a 6 *points de diramation*, c'est-à-dire que, parmi les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P, il y en a 6 qui sont constitués par des courbes coïncidentes.

23. *Remarque concernant une certaine dualité.*

D'après une propriété générale établie au n. 20, un système Σ constitué par ∞^2 courbes de genre deux sur une surface F_0 est birationnellement identique à cette surface; cela signifie que si l'on représente les éléments (courbes) de Σ par une surface F', on pourra passer de F à F' par une transformation birationnelle.

Nous allons étudier de plus près la correspondance remarquable entre points et courbes que l'on obtient ainsi, lorsque, F étant une surface de Jacobi, on considère le système Σ de degré et d'indice 2, que nous venons de définir.

On a par construction qu'à tout point de F' correspond sur F *une* courbe C de Σ et réciproquement. Mais si l'on considère les ∞^1 courbes C issues par un point P de F, on aura qu'à ces courbes répondent des points décrivant sur F' une courbe C' que l'on regardera comme homologue au point P. Or les ∞^2 courbes définies ainsi sur F', formeront un certain système Σ', et l'on voit de suite que le degré de Σ' est l'indice de Σ et l'indice de Σ' est le degré de Σ; par conséquent ces nombres sont égaux à 2. Il s'ensuit (n. 15) que le genre des courbes C' est aussi égal à 2; c'est ce qu'on peut reconnaître aisément d'une façon directe, parce que la série des courbes C issues par un point P de F, est birationnellement identique à une courbe quelconque C de la même série. (Remarque au n. 22.)

Le système Σ' de F' étant parfaitement analogue au système Σ de F, ces remarques nous amènent à établir une sorte de *principe de dualité* liant les propriétés des surfaces F, F', ou si l'on aime mieux, liant les propriétés de la surface F et de la variété Σ.

Cette dualité consiste en ce qu'à toute propriété de F répond une propriété corrélative où l'on remplace les points par les courbes d'un système Σ de degré et d'indice 2, et réciproquement.

24. *Autres remarques concernant les courbes de genre deux sur une surface de Jacobi.*

Nous avons remarqué qu'une surface de Jacobi F renferme un système ∞^2 Σ de courbes C de genre deux, sans points doubles. Hors de Σ il y aura d'autres courbes K de genre deux; nous allons montrer que K doit couper les courbes C de Σ en plus que deux points. C'est dire qu'on a le théorème suivant:

Toute courbe K de genre deux coupant les courbes C d'un système Σ en deux points, appartient à ce système.

Pour le démontrer remarquons d'abord que K ne saurait toucher toutes les ∞^2 courbes C, car il s'ensuivrait que les $\infty^1 C$ issues par un point de K n'auraient pas des intersections variables.

Ceci posé, considérons une série $\infty^1 \Gamma$ de C passant par un point P de K et ne touchant pas K.

Si K n'appartient pas à la série Γ, pour tout point M variable sur K il y a *deux* C de la série Σ; réciproquement toute courbe C de Γ coupe K en *un* point variable. Ainsi on obtient une correspondance $[1, 2]$ entre la courbe K et la série algébrique $\infty^1 \Gamma$. Mais la série Γ a le genre deux (puisqu'elle correspond élément par élément à une courbe C de Γ); ainsi la conclusion obtenue vient contredire un théorème connu de Weber, d'après lequel, étant données deux variétés algébriques ∞^1 de genre deux (ou de genre supérieur à deux) toute transformation entre elles qui soit rationnelle dans un sens, est rationnelle aussi dans le sens inverse.

Cette contradiction prouve que la courbe K appartient à la série Γ des courbes C, c'est-à-dire qu'elle est une courbe C; ce qu'il fallait démontrer.

25. *Système Σ_δ appartenant à une surface de Picard F_δ.*

Considérons maintenant une surface F_δ (de diviseur $\delta > 1$) comme représentant une involution cyclique I_δ, qui appartient à une surface de Jacobi F (n. 11).

Il y a sur F un système $\infty^2 \Sigma$ constitué par des courbes C de genre deux sans points doubles; cherchons les caractères des courbes qui correspondent aux C sur F_δ. D'abord ce seront des courbes de genre deux; mais il est aisé de reconnaître qu'elles aurons $\delta - 1$ points doubles.

En effet à une C sont conjuguées, par rapport à I_δ, $\delta - 1$ courbes du même système Σ, qui coupent la C donnée en $\delta - 1$ couples; à chacune de celles-ci correspond un point double de la courbe homologue à C sur F_δ, courbe que nous désignerons par C_δ.

Or les ∞^2 courbes C_δ que l'on construit analoguement sur F_δ, formeront un système Σ_δ qui (d'après un théorème de M. Enriques) sera renfermé, en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes du même ordre et de genre $\delta + 1$, système constitué par ∞^2 systèmes linéaires dont le degré sera égal à 2δ (n. 15).

Évaluons les caractères du système Σ_δ.

D'abord son degré, c'est-à-dire le nombre des points communs à deux courbes C_δ, sera égal à 2δ.

L'indice de Σ_δ est aussi 2δ. En effet considérons deux points A, B de F_δ; à ceux-ci correspondent sur F deux groupes de points $A_1, A_2, \ldots A_\delta$, $B_1, B_2, \ldots B_\delta$ et il y a $2\delta^2$ courbes C renfermant un point A_s ($s = 1, 2, \ldots$) et un point $B_t (t = 1, 2, \ldots)$; mais ces $2\delta^2$ courbes C se partagent en 2δ groupes, chaque groupe étant constitué par δC conjuguées par rapport à l'involution I_δ; il s'ensuit qu'il y a sur F_δ 2δ courbes C_δ passant par A et B.

En résumant, *toute surface de Picard, de diviseur* δ, *renferme un système* ∞^2 Σ_δ *de courbes de genre deux irréductibles douées de* $\delta - 1$ *points doubles, système dont le degré et l'indice sont égaux à* 2δ.

Fait exception le cas des surfaces F_δ *renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques qui se coupent en* δ *points;* en ce cas F_δ représente une involution I_δ sur une surface de Jacobi particulière (admettant deux faisceaux de courbes elliptiques unisécantes) de sorte que *les courbes du système* Σ_δ *dégénèrent* en des couples de courbes elliptiques choisies dans les deux faisceaux.

Remarque. Néanmoins, même en ce cas, le système $\infty^{\delta+1}$ de courbes de genre $\delta + 1$ qui renferme Σ_δ, est composé par des courbes généralement irréductibles.

26. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Jacobi de modules généraux.*

Nous avons reconnu que toute surface de Jacobi générale F, renferme un système continu ∞^2 de courbes de genre deux sans points doubles; ce système, que nous avons appelé Σ, a le degré et l'indice égaux à 2.

Or les groupes de $n (> 1)$ courbes C de Σ seront renfermés en un système continu ∞^{n^2+1} de courbes irréductibles, système qu'on pourra désigner par $[nC]$ et que l'on appellera multiple de $\Sigma = [C]$ suivant le nombre n.

Le système $[nC]$ sera aussi transformé en lui-même par les transformations de première et de seconde espèce de la surface; il sera constitué de ∞^2 systèmes linéaires $|nC|$ de genre $n^2 + 1$, de degré $2n^2$ et de dimension $n^2 - 1$.

Remarque. Il est intéressant pour la suite de montrer que: *tout système* $|nC|$ *est invariant vis-à-vis des transformations cycliques de seconde espèce, d'ordre* n, *de la surface* F.

C'est ce qu'on prouve de la manière suivante: soit π une transformation de seconde espèce, périodique d'ordre n; toute courbe C de Σ est amenée par π, en $n - 1$ courbes homologues, qui avec la première forment un certain groupe nC; on obtient ainsi ∞^2 groupes, invariant vis-à-vis de π, et dont deux quelconque n'appartiennent pas au même système linéaire; ces groupes définissent donc les ∞^2 systèmes linéaires complets $|nC|$ de la série $[nC]$, et l'on voit ainsi que tous ces systèmes $|nC|$ sont invariant par rapport à π, C. Q. F. D.

Sans nous arrêter davantage sur cette remarque, rappelons que l'on a le théorème suivant:

Les modules de la surface F *ayant des valeurs générales, toute courbe appartenant à* F *est renfermée en un système* $[nC]$ *de courbes du même ordre.*

C'est là une conséquence immédiate d'un théorème établi par M. Severi.[1]

[1] Memorie della R. Accademia della Science di Torino, t. 54, s. II, 1903, n.º 23.

Ainsi que nous l'expliquerons tout à l'heure cette propriété correspond aussi à un fait connu de la théorie des fonctions abéliennes.

Il en découle en particulier que *la surface de Jacobi ne renferme en général qu'un seul système de courbes de genre deux sans points doubles.*

27. *Courbes de genre quelconque appartenant à une surface de Picard de modules généraux.*

Nous nous proposons d'étendre le théorème rappelé ci-dessus aux surfaces F_δ de diviseur $\delta > 1$.

Nous savons que F_δ renferme ∞^2 courbes C_δ de genre deux, qui sont contenues dans un système continu $\infty^{\delta+1}$ $[C_\delta]$ de genre $\delta + 1$ et de degré 2δ, constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Nous voulons établir le théorème suivant:

Toute courbe appartenant à une surface F_δ de modules généraux, est renfermée en un système $[nC_\delta]$ de courbes du même ordre, c'est-à-dire en un système multiple de $[C_\delta]$ suivant un certain nombre n choisi d'une façon convenable.

Nous considérerons F_δ comme représentant une involution cyclique I_δ sur une surface de Jacobi F de modules généraux (n. 11). Les C_δ de F_δ correspondent aux courbes C engendrant le système Σ de F.

Soit K une courbe quelconque de F_δ et $|K|$ le système linéaire complet auquel elle appartient.

A $|K|$ correspond sur F un système linéaire $|K'|$, qui sera contenu totalement dans le système continu $[sC]$, pour une certaine valeur de s; cette valeur a la signification suivante: *le degré de $|K|$ est*

$$\frac{2s^2}{\delta}.$$

Il faut remarquer que $|K'|$ ne sera pas un système linéaire complet; en effet les courbes K' satisfont à la condition d'être transformées en elles-mêmes par la transformation cyclique de seconde espèce π, qui engendre l'involution I_δ; en laissant tomber cette condition on trouvera un système linéaire plus ample $|sC|$ renfermant $|K'|$. La seule chose qu'on peut affirmer, c'est que $|K'|$ est un système linéaire *complet par rapport à l'involution I_δ*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas en $|sC|$ un système lineaire plus ample de $|K'|$ qui soit transformé en lui-même par π et renferme $|K'|$.

Ceci posé, considérons une transformation périodique de seconde espèce, ω, d'ordre s, engendrant une involution cyclique; on peut supposer que ω soit choisie de telle façon qu'il n'y ait pas des puissances communes à π, ω.

Or nous savons que ω transforme en lui-même notre système linéaire complet $|sC|$ ainsi que tout autre système de la série ∞^2 constituant $[sC]$ (n. 26); en outre ω transforme en elle-même l'involution I_δ; par conséquent ω transformera en lui-même le système linéaire $|K'|$ qui, étant renfermé en $|sC|$ est complet par rapport à I_δ.

Passons à la surface F_δ. La transformation ω de F étant permutable avec π, donne lieu à une transformation de seconde espèce $\bar{\omega}$ périodique d'ordre s, sur F_δ; le système linéaire $|K|$ vient transformé en lui-même par ω.

On en déduit qu'il y a en $|K|$ des courbes unies par rapport à $\bar{\omega}$, se partageant en un certain nombre de systèmes linéaires; nous considérerons un de ces systèmes $|K|$, de dimension ≥ 0.

Soit I_s l'involution cyclique d'ordre s engendrée par $\bar{\omega}$ sur F_δ et soit F_h la surface hyperelliptique (ayant un certain diviseur h) qui représente I_s.

Au système $|K|$ de F_δ correspond sur F_h un système linéaire de courbes dont le degré s'obtient de celui de $|K|$ en le divisant par s; le degré du système obtenu sur F est donc

$$\frac{2s}{\delta}.$$

Or ce degré doit être un nombre entier pair (voir n. 15), par conséquent s *est divisible par* δ.

En posant

$$s = n\delta$$

on aura donc sur F, que $|K'|$ appartient à $[n\delta C]$, et sur F_δ que $|K|$ appartient totalement à $|nC_\delta|$, C. Q. F. D.

28. *Rapprochement entre les résultats qui précèdent et la théorie des séries Θ. Représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi.*

Il y a lieu de rapprocher les résultats que nous venons d'établir, à quelques théorèmes connus de la théorie des fonctions abéliennes.

Nous commençons à rappeler les notions suivantes sur les *séries Θ* et sur les *fonctions intermédiaires*.

Soit un système de périodes normales

$$(1)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{cases}$$

satisfaisant à l'inégalité classique $g_1 g'_1 > h_1^2$, g_1, h_1, g'_1, étant les parties imaginaires des périodes g, h, g'.

On suppose ordinairement que g_1, et par conséquent g'_1, soient positifs, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément.

Une *fonction thêta* relative au tableau (1), est définie par les conditions fonctionnelles

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta(u+1, v) = \Theta(u, v+1) = \Theta(u,v) \\ &\Theta(u+g, v+h) = \Theta(u,v) e^{-2\pi i l u + \nu} \\ &\Theta(u+h, v+g') = \Theta(u,v) e^{-2\pi i l v + \nu'} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(l entier; ν, ν' constantes données).

Les conditions d'existence d'une telle fonction reviennent aux conditions de convergence de la série qu'on obtient en développant Θ par la formule de Fourier. On trouve ainsi qu'il doit être $g_1 g'_1 > h_1^2$ et que le nombre entier l doit avoir le signe de g_1, c'est-à-dire, dans notre hypothèse, que $l > 0$.

Le nombre l est *l'ordre* de la fonction Θ.

Les exponentielles

$$e^{-2\pi i l u + \nu}, \quad e^{-2\pi i l v + \nu'}$$

sont les *multiplicateurs* de Θ.

On trouve aisément que les fonctions Θ aux mêmes multiplicateurs (c'est-à-dire rélatives aux mêmes valeurs des constantes ν, ν'), peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants, de l^2 d'entre elles.

On a aussi, d'après un théorème bien connu de M. Poincaré, que deux fonctions Θ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs, incongrus par rapport aux périodes.

Les fonctions Θ peuvent être généralisées en introduisant des fonctions que (d'après une dénomination de Briot et Bouquet) MM. Poincaré et Humbert ont appelées *fonctions intermédiaires*.

Il s'agit des fonctions se reproduisant par l'addition d'une des périodes $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', à un *multiplicateur* près, qui est une exponentielle de première degré $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$.[1]

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle de seconde degré $e^{a u^2 + b u v + c v^2 + d u + f v}$, on peut disposer des constantes $a, b, \ldots$ de façon que la nouvelle fonction $\varphi(u,v)$ vérifie les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u,v), \quad \varphi(u, v+1) = \varphi(u,v) e^{\theta u} \\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u,v) e^{\lambda u + \mu v + \nu} \\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u,v) e^{\lambda' u + \mu' v + \nu'} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

les $\theta, \lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ étant des constantes.

[1] Voir surtout: Poincaré, American Journal, t. VII, p. 316; Acta math., t. 26, p. 81; Humbert, Journal de Math. s. V, t. V (1899); t. VI (1900), etc.

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'il existe entre g, h, g' une relation de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{4}$$

les A, B, C, D, E étant des entiers — premiers entre eux — dépendant des constantes θ, λ, μ, λ', μ'.

Les relations de la forme (4) entre les périodes g, h, g', ont été l'objets de recherches remarquables de M. Humbert et dans la suite nous aurons à les considérer par rapport aux transformations birationnelles d'une surface de Jacobi en elle-même.

Nous distinguerons ces relations d'autres relations singulières (à coefficients entiers) qu'on peut avoir entre les périodes, en les appelant *relations de Humbert*.

En exprimant les constantes θ, λ, μ, λ', μ', en fonction des entiers A, B, C, D, E on a les conditions

$$\begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u,v), \ \varphi(u, v+1) = \varphi(u,v)e^{-2\pi i Dku} \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[lu-(C-Dg)kv]+v} \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[Aku+(l+Bk+Dkh)v]+v'} \end{cases} \tag{5}$$

où l, k sont deux entiers que M. Humbert appelle les *indices* de la fonction φ.

Lorsque $k = 0$, on tombe sur les fonctions Θ d'ordre l.

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, de sorte que la relation (4) soit une identité ($A = B = C = D = E = 0$), la φ se réduit de même à une fonction Θ d'ordre l, c'est-à-dire que *les fonctions intermédiaires n'existent que pour des valeurs particulières des périodes*.

Les conditions d'existence des fonctions intermédiaires correspondant à une relation de Humbert; le nombre des fonctions linéairement indépendantes qu'on trouve dans un système de fonctions φ aux mêmes multiplicateurs; et enfin le nombre des zéros communs à deux fonctions φ répondant à une même relation singulière, ont été donnés par M. Humbert dans ses mémoires sur les fonctions abéliennes, auxquelles nous renverrons.[1]

Ces notions rappelées, nous allons nous occuper de la représentation des courbes tracées sur une surface de Jacobi, représentation que l'on obtient au moyens des fonctions Θ ou des fonctions intermédiaires.

Soit F la surface de Jacobi relative au tableau (1) et u, v les intégrales normales de première espèce attachées à F. Si entre les paramètres u, v on pose l'équation

[1] Voir en particulier le mémoire dans le Journal de Math., 1900, p. 313.

$$\Theta(u,v)=0,$$

la Θ étant d'ordre l et de multiplicateurs donnés, on obtient une courbe *algébrique* appartenant à un système linéaire ∞^{l^2-1}, car entre les $\Theta(u,v)$ il y en a l^2 linéairement indépendantes. Ce système linéaire à son tour, est contenu totalement dans un système continu de ∞^2 systèmes linéaires analogues, qui sont représentés par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0,$$

renfermant deux paramètres λ, μ. On remarquera que le premier membre de cette équation est encore une fonction thêta de u, v; mais elle a des multiplicateurs différents de ceux qui appartiennent à $\Theta(u,v)$.

Le degré du système continu envisagé, est égal au nombre des zéros communs à deux fonctions Θ d'ordre l, c'est-à-dire à $2l^2$. En se rappelant la relation entre le genre et le degré d'un système continu tracé sur F (n. 15), on trouve que le genre de notre système est

$$\pi=l^2+1.$$

En particulier, lorsque $l=1$, le système continu représenté par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0$$

a la dimension, le degré, le genre égaux à 2, c'est-à-dire qu'il est un système Σ (n. 21).

Comme entre les fonctions thêta d'ordre l et de multiplicateurs donnés, il y a aussi la puissance l^{me} d'une fonction thêta de premier ordre ayant des multiplicateurs convenables, on en conclut que:

Le système continu donné par l'équation

$$\Theta(u+\lambda,\ v+\mu)=0,$$

où la Θ, d'ordre l, renferme l^2 paramètres linéaires et homogènes, est le multiple d'ordre l du système Σ formé par les courbes de zéro des fonctions thêta de premier ordre.

Si l'on ajoute que, pour g, h, g' arbitraires, toute courbe tracée sur F s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta,[1] on tombe de nouveau sur la conclusion déjà établie au n. 26 que: *Sur une surface de Jacobi à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système* Σ (déterminé d'une façon unique) *et de ses multiples.*

[1] Humbert, Journal de Math., 1893, p. 371.

Lorsque — pour des valeurs particulières des modules g, h, g' — on trouve sur la surface F plusieurs systèmes Σ différents entre eux, il est aisé de reconnaître que toute courbe d'un de ces systèmes, peut être représentée en égalant à zéro une fonction Θ, pourvu que l'on choisisse convenablement les intégrales normales u, v. Il nous sera permis d'omettre la démonstration de ce fait dont nous n'aurons pas besoin dans la suite.

Supposons maintenant qu'on ait fixé le choix des intégrales normales u, v et qu'il s'agisse d'une surface F à modules particuliers. En égalant à zéro une fonction Θ, on aura une courbe appartenant à un système déterminé $\Sigma = [C]$ ou à son multiple d'ordre $l, [lC]$.

Toute autre courbe L de F sera représentée en égalant à zéro une fonction intermédiaire, soit $\varphi(u,v) = 0$.

C'est là un théorème fondamental de M. APPELL[1] qui explique le rôle des fonctions intermédiaires dans l'étude des surfaces de Jacobi à modules particuliers.

On peut ajouter que, si la relation de HUMBERT correspondant à la fonction φ, d'indices l, k, est

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

le système linéaire complet $|L|$ a la dimension

$$r = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2 - 1,$$

le degré $2r + 2$, le genre $r + 2$, et la courbe L coupe en $2l + Bk$ points toute courbe C de Σ.

Le système $|L|$ appartient à une série continue ∞^2 de système linéaires analogues $\varphi(u + \lambda, v + \mu) = 0$.

29. *Représentation des courbes tracées sur une surface F_δ.*

Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{cases}$$

le tableau des périodes primitives des intégrales normales u, v attachées à une surface F_δ de rang l et diviseur δ quelconque.

On peut construire aisément des fonctions satisfaisant non seulement aux relations générales (2), du n. 28, mais aussi aux relations particulières

$$\Theta(u + 1, v) = \Theta\left(u, v + \frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,v)$$

[1] APPELL, Journal de Math., 1891, p. 195; HUMBERT, ibidem, 1893, p. 42—43.

de sorte que les quatre paires de périodes relatives à ces fonctions soient données par le tableau (1).

Nous appelerons Θ_δ les fonctions Θ satisfaisant à cette condition. On obtient en particulier une fonction Θ_δ en considérant le produit

$$\Theta_\delta(u,v) = \Theta(u,v)\Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right)\Theta\left(u,\ v+\frac{2}{\delta}\right)\cdots\Theta\left(u,\ v+\frac{\delta-1}{\delta}\right)$$

où $\Theta(u,v)$ est une fonction thêta relative au tableau

$$(2)\qquad \begin{cases} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g'. \end{cases}$$

Si la fonction $\Theta(u,v)$ est d'ordre l_0, la $\Theta_\delta(u,v)$ est évidemment d'ordre $l=\delta l_0$. Réciproquement, on peut démontrer que *toute fonction thêta vérifiant les relations*

$$(3)\qquad \begin{cases} \Theta(u+1,\ v) = \Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,v) \\ \Theta(u+g,\ v+h) = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l u+\nu} \\ \Theta(u+h,\ v+g') = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l v+\nu'} \end{cases}$$

est d'ordre l multiple de δ.

En effet la dernière de ces relations donne

$$\Theta\left(u+h,\ v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right)e^{-2\pi i l v-2\pi i\frac{l}{\delta}+\nu'}$$

d'où, en vertu de la condition

$$\Theta\left(u,\ v+\frac{1}{\delta}\right) = \Theta(u,\ v),$$

on tire

$$\Theta\left(u+h,\ v+\frac{1}{\delta}+g'\right) = \Theta(u+h,\ v+g') = \Theta(u,v)e^{-2\pi i l v-2\pi i\frac{l}{\delta}+\nu'}.$$

Il faudra donc qu'il soit

$$e^{2\pi i\frac{l}{\delta}} = 1,\ \text{c'est-à-dire:}\ \frac{l}{\delta} = \text{entier}.$$

On trouve aisément, par le même procédé qu'on emploie dans le cas des fonctions Θ générales, que les fonctions Θ_δ — les ν, ν' étant des constantes données — peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires à coefficients constants de $\frac{l^2}{\delta}$ d'entre elles.

Deux fonctions Θ_δ d'ordres l, l' ont $2ll'$ zéros communs incongrus par rapport au tableau (2), tandis qu'elles ont seulement $\frac{2ll'}{\delta}$ zéros incongrus par rapport au tableau (1), car les zéros incongrus par rapport à (2) se distribuent en $\frac{2ll'}{\delta}$ groupes de δ zéros congrus par rapport à (1).

Ceci posé, remarquons qu'au moyen de la correspondance $[1, \delta]$ entre la surface F_δ et la surface de Jacobi F relative au tableau (2), à une courbe C

$$\Theta(u,v)=0$$

d'un système Σ tracé sur F, répond sur F_δ la courbe C_δ

$$\Theta(u,v)\,\Theta\left(u,\, v+\frac{1}{\delta}\right)\cdots\Theta\left(u,\, v+\frac{\delta-1}{\delta}\right)=0$$

appartenant au système Σ_δ homologue de Σ (n. 25).

Lorsque on ne regarde pas comme distincts deux zéros de $\Theta(u,v)$ incongrus par rapport à (2), mais congrus par rapport à (1), on peut aussi représenter la courbe C_δ avec la même équation $\Theta(u,v)=0$, qui représente la courbe correspondante C.

Il s'ensuit que *sur la surface F_δ les courbes de zéro des fonctions thêta du premier ordre, rélatives au tableau* (2), *sont de courbes C_δ d'un système Σ_δ.*

Un système linéaire complet $|C_\delta|$ est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u,v)=0, \tag{4}$$

Θ_δ étant une fonction d'ordre *minimum* δ satisfaisant aux conditions (3) pour des valeurs données des constantes ν, ν'. Cette fonction renferme $\frac{\delta^2}{\delta}=\delta$ paramètres linéaires et homogènes, de sorte que le système $|C_\delta|$ a la dimension $\delta-1$. Le degré de ce système est $\frac{2\delta^2}{\delta}=2\delta$, le genre $\pi=\delta+1$ (n. 15).

Au varier des multiplicateurs de la fonction Θ_δ on obtient toute courbe C_δ de Σ_δ, c'est-à-dire que ce système est donné par l'équation

$$\Theta_\delta(u+\lambda,\, v+\mu)=0. \tag{5}$$

Si la fonction Θ_δ envisagée a l'ordre $l=l_0\delta$, on voit aisément que l'équation (4) donne un système linéaire $|l_0C_\delta|$ et que l'équation (5) donne le système continu complet $[l_0C_\delta]$.

Ce que nous avons dit des fonctions thêta peut se répéter aussi pour les fonctions intermédiaires.

Une fonction intermédiaire $\varphi_\delta(u,v)$ définie par rapport au tableau (2), c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (5) du n. 28, pourra être regardés comme une fonction intermédiaire relative au tableau (1), lorsqu'on aura

$$\varphi_\delta\left(u,\, v+\frac{1}{\delta}\right)=\varphi_\delta(u,\, v)e^{-2\pi i D k u}.$$

On obtient p. ex. une fonction intermédiaire de cette espèce en considérant le produit

$$\varphi(u,\, v)\,\varphi\left(u,\, v+\frac{1}{\delta}\right)\,\cdots\,\varphi\left(u,\, v+\frac{\delta-1}{\delta}\right),$$

$\varphi(u,v)$ étant une fonction intermédiaire relative au tableau (1); et l'on déduit aisément la théorie des fonctions φ_δ de celle des fonctions φ étudiées par M. Humbert.

Le théorème de M. Appell nous dit actuellement que *toute courbe algébrique tracée sur F_δ peut être représentée en égalant à zéro une fonction φ_δ.*

Lorsque les modules g, h, g' de la surface F_δ ou de la surface de Jacobi attachée à F_δ sont généraux, toute fonction φ_δ se réduit à une fonction Θ_δ.

Or, d'après la remarque que toute fonction Θ_δ a un ordre multiple de δ on retrouve ainsi le résultat établi au n. 27, que *sur une surface F_δ à modules généraux il n'y a d'autres courbes algébriques que celles d'un système $[C_\delta]$ bien détérminé et de ses multiples.*

30. *Surfaces de Picard d'ordre minimum dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Les quelques remarques que nous venons d'établir par des voies différentes aux n. 26, 27 et 28, 29, nous amènent à construire des types, projectivement définis, des surfaces de Picard; et ce sera un résultat remarquable que, en exceptant des modules particuliers, on obtiendra ainsi, pour chaque valeur du diviseur δ, les surfaces de Picard d'ordre minimum, parmi celles qui ne renferment pas des courbes exceptionnelles.

Nous avons reconnu qu'à toute surface de Picard F_δ appartient un système Σ_δ renfermé en un système $\infty^{\delta+1}$ de courbes (généralement irrréductibles) de genre $\delta+1$; et nous avons ajouté que le système $\infty^{\delta+1}$ est constitué par ∞^2 systèmes linéaires.

Considérons un quelconque $|C_\delta|$ parmi ces systèmes linéaires $\infty^{\delta-1}$ de genre $\delta+1$ et de degré 2δ.

En supposant $\delta>3(\delta-1\geq 3)$ on pourra transformer F_δ de façon que les courbes du système considéré deviennent des sections planes ou hyperplanes de la surface; on obtiendra ainsi *une surface F_δ d'ordre 2δ appartenant à un espace*

$S_{\delta-1}$ *de dimension* $\delta - 1$ *et cette surface ne renfermera pas des courbes exceptionnelles,* puisque le système linéaire qui nous a fourni la transformation n'a pas de points base.

Ajoutons, sans appuyer sur les détails, qu'il est aisé de reconnaître que notre surface d'ordre 2δ ne saurait se réduire à une surface d'ordre δ comptée deux fois.

Faisons maintenant $\delta = 3, 2$. Il suffira alors de considérer le double d'un système linéaire $|C_\delta|$ c'est-à-dire $|2C_\delta|$.

Ce système est de genre

$$\delta + 1 + \delta + 1 + 2\delta - 1 = 4\delta + 1,$$

de degré

$$8\delta$$

et de dimension

$$4\delta - 1.$$

On obtient donc des *surfaces de Picard* F_2, F_3 *d'ordre 16, 24, qui appartiennent respectivement à un espace* S_7, S_{11}, *et qui sont dépourvues de courbes exceptionnelles.*

Pour $\delta = 1$ la dimension de $|2C|$ est 3; il semble donc qu'on sera amené à une surface de Jacobi d'ordre 8 sans courbes exceptionnelles. Mais une circonstance particulière se presente; les courbes du système transformant $|2C|$ passant par un point, renferment en conséquence un autre point, qui est conjugué au premier en une transformation de première espèce, bien définie par la condition de laisser invariant le système $|2C|$.

Ainsi la surface d'ordre 8 que l'on construit se réduit à une surface de quatrième ordre (de Kummer) comptée deux fois.

Il faut donc considérer un système linéaire $|3C|$ qui a le genre 10, le degré 18 et la dimension 9. On en est amené à une *surface de Jacobi d'ordre 18 en un espace* S_9, *qui est dépourvue de courbes exceptionnelles.*

Il est bien entendu qu'en projetant les surfaces appartenant à des hyperespaces, que nous venons de construire, on obtiendra des surfaces de l'espace ordinaire, qui seront dépourvues de courbes exceptionnelles et aurons le même ordre que les surfaces données, si l'on a projeté par des points extérieurs.

En projetant par des points de la surface l'ordre en est abaissé, mais des courbes exceptionnelles prennent naissance.

III. Classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi.

31. *Invariants des involutions appartenant à une surface de Jacobi.*

D'après les remarques développées dans le n. 6, étant donnée une surface hyperelliptique Φ, on peut toujours construire une surface de Jacobi F transformée rationnelle de Φ; on aura entre Φ, F une correspondance $[1, n]$, de telle sorte qu'aux points de Φ correspondront les groupes G_n de n points d'une certaine involution I_n sur F. La surface Φ est une *image* de l'involution I_n. Ainsi le problème de déterminer les familles, birationnellement distinctes, de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramené à l'étude et à la classification des involutions appartenant à une surface de Jacobi F.

Et nous supposerons toujours que F ne renferme pas des courbes exceptionnelles, puisque ces courbes, si elles existent, peuvent être éliminées par une transformation de la surface.

Ajoutons les remarques suivantes:

1) Toute involution I_n donnée sur F (soit toute surface — image de I_n — dont F est une transformée rationnelle) a le genre géométrique

$$p_g \leq 1.$$

En effet, si l'on fait abstraction des courbes exceptionnelles, il ne peut pas exister sur Φ des courbes canoniques d'ordre > 0, car à une courbe canonique de Φ devrait correspondre une courbe faisant parti d'une courbe canonique de F.[1]

Cette remarque prouve même davantage, c'est-à-dire que (en faisant toujours abstraction des courbes exceptionnelles) Φ ne saurait renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, et par conséquent, en désignant par P_i ses genres d'ordre $i = 2, 3, \ldots$, on aura

$$P_i \leq 1.$$

2) Le genre numérique d'une involution appartenant à F, ne saurait descendre au dessous de -1, soit

$$p_a \geq -1.$$

En effet si l'on avait $p_a < -1$, la surface pourrait être ramenée birationnellement à une réglée dont la section plane aurait le genre $-p_a$; alors aux génératrices de celle-ci correspondraient sur F les courbes d'un faisceau irrationnel, de genre $-p_a > 1$; mais un tel faisceau ne saurait appartenir à une surface de Jacobi (n. 19).

[1] Enriques, Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche (Memorie dell'Acc. di Torino, s. III, t. 44, 1893). Cap. VI. — Voir aussi Severi, Rendiconti dell'Ist. Lombardo, s. II, t. 36, 1903.

Ces remarques nous amènent à établir une distinction des involutions qui peuvent appartenir à F, d'après les valeurs des caractères invariants.

On pourra avoir des involutions irrégulières (c'est-à-dire des involutions représentées par des surfaces irrégulières) et des involutions régulières; nous désignerons en tous cas, par $d (> 0)$ l'irrégularité d'une involution appartenant à F, ou de la surface qui en est l'image; d sera donc la différence $p_g - p_a$ entre le genre géométrique et le genre numérique de Φ.

Or trois cas seront possibles:

$$d = 2, \quad d = 1, \quad d = 0.$$

Si $d = 2$ les inégalités $p_g \leq 1$, $p_a \geq -1$, ne peuvent être satisfaites qu'en faisant

$$p_g = 1, \qquad p_a = -1;$$

et, comme il n'y a pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on tombe sur des surfaces Φ hyperelliptiques de rang 1; ainsi que nous l'avons remarqué ces surfaces représentent des involutions engendrées sur F par des transformations cycliques de 2$^{\text{de}}$ espèce (n. 12).

Si $d = 1$, on peut supposer à priori

$$p_g = 1, \qquad p_a = 0,$$

ou

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1;$$

mais la première hypothèse doit être écartée parce qu'il n'existe pas des courbes canoniques d'ordre > 0;[1] on aura donc

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1.$$

On tombe alors sur des *surfaces elliptiques*, douées d'un groupe elliptique ∞^1 de transformations birationnelles en elles-mêmes;[2] parmi ces surfaces on pourra rencontrer des surfaces qui se ramènent à des réglées elliptiques, et des surfaces irréductibles à des réglées; on peut distinguer les deux cas d'après la valeur du genre d'ordre 12, P_{12}; on a

$$P_{12} = 0 \qquad (P_4 = P_6 = 0)$$

dans le premier cas; et $P_{12} > 0$, et ici donc $P_{12} = 1$, dans le second.[3]

[1] Cfr. Enriques »Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$» Atti Accad. di Bologna (9 Dec. 1906).

[2] Cfr. Enriques »Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero» Circolo Matematico di Palermo (5 Marzo 1905).

[3] Ibidem.

Si enfin $d = 0$, on aura

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1\,.$$

Dans le premier cas on pourra considérer le bigenre P_2; si

$$P_2 = 0$$

la surface est rationnelle (Castelnuovo).[1]

L'hypothèse $P_2 > 0$, jointe à nos inégalités $P_i \leq 1$ $(i = 2, 3, \ldots)$, ne peut être satisfaite que pour des surfaces réductibles à un type connu, pour lesquelles

$$P_2 = 1, \quad P_3 = 0 \quad (P_{2i} = 1, \quad P_{2i+1} = 0).$$

Les résultats de cette discussion viennent résumés par le tableau suivant, où nous indiquons les valeurs possibles des caractères invariants qui appartiennent à une surface hyperelliptique quelconque (soit les caractères des involutions qui peuvent appartenir à F):

a) $d = p_g - p_a = 2$, $p_a = -1$, $p_g = 1$ $(P_i = 1;\ i = 2, 3, \ldots)$ (*surfaces hyperelliptiques de rang 1* — n. 16);

b) $d = p_g - p_a = 1$

$$p_a = -1,\ p_g = 0 \begin{cases} P_{12} = 0 \ (\textit{réglées elliptiques}) \\ P_{12} = 1 \ (\textit{surfaces elliptiques} \text{ non réductibles à des réglées}) \end{cases}$$

c) $d = p_g - p_a = 0$

$$p_g = p_a = 0 \begin{cases} P_2 = 0 \ (\textit{surfaces rationnelles}) \\ P_2 = 1,\ P_3 = 0. \end{cases}$$

$$p_g = p_a = P_2 = 1 \ (P_i = 1;\ i, = 3,\ 4 \ldots).$$

Ces résultats sont obtenus *à priori* d'après les théorèmes de classification établis récemment dans la théorie des surfaces algébriques; il y a lieu maintenant de les retrouver à posteriori en classifiant les involutions qui peuvent appartenir à une surface de Jacobi F, d'après deux points de vue différents:

1) d'après le *nombre des transformations de seconde espèce* de F qui les ramènent en elles-mêmes;

2) d'après le *nombre de leurs coïncidences.*

Chacun de ces points de vue nous fournira ainsi un critérium pour reconnaître si une involution donnée sur F, appartient à l'une ou à l'autre des familles que nous venons de déterminer.

[1] »Sulle superficie di genere zero» Memorie della Società italiana delle Scienze (1896).

Remarque. Les résultats auxquels nous serons amenés subsistent de même pour les involutions appartenant à une surface de Picard de diviseur quelconque.

32. *Les involutions classifiées d'après leurs transformations en elles-mêmes.*

Plaçons nous d'abord au premier point de vue.

Soit donc I_n une involution donnée sur la surface de Jacobi F, Φ une surface image de I_n.

L'involution I_n (soit la surface Φ qui la représente) pourra être regulière ou irrégulière, son irrégularité $d(\geq 0)$ étant exprimée par la différence $p_g - p_a$ entre son genre géométrique et son genre numérique.

Or nous allons démontrer le théorème suivant:

Une involution appartenant à F sera irrégulière ou régulière, suivant qu'il existe ou qu'il n'existe pas une infinité (continue) de transformations de seconde espèce qui la transforment en elle-même.

Considérons d'abord une involution I_n régulière; nous prouverons qu'il ne peut exister qu'un nombre fini (tout au plus) de transformations de seconde espèce par rapport auxquelles I_n jouit de la propriété d'invariance.

Soient u, v deux intégrales indépendantes de première espèce, attachées à la surface F; évaluons les sommes des valeurs qu'elles prennent aux n points d'un groupe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de I_n.

Soit

$$\Sigma u(x_i) \equiv u(x_1) + u(x_2) + \cdots + u(x_n) \equiv h$$
$$\Sigma v(x_i) \equiv v(x_1) + v(x_2) + \cdots + v(x_n) \equiv k.$$

En faisant varier le groupe $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, h, k demeurent constantes, autrement elles fourniraient des intégrales de Φ (tandis que le nombre de celles-ci est $d = 0$).

Or une transformation de 2^{de} espèce de F est donnée par les formules

$$u(y) \equiv u(x) + a$$
$$v(y) \equiv v(x) + b.$$

Si cette substitution doit transformer en elle-même l'involution I_n, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \Sigma u(y_i) \equiv \Sigma u(x_i) + na \equiv h \\ \Sigma v(y_i) \equiv \Sigma v(x_i) + nb \equiv k \end{cases}$$

(les congruences subsistant toujours par rapport aux périodes de u, v); il suit

$$na \equiv 0$$
$$nb \equiv 0.$$

et par conséquent a et b ne sauraient recevoir qu'un *nombre fini* de valeurs, distinctes par rapport aux périodes.

Supposons au contraire que l'involution I_n soit irrégulière. Si elle était transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2de espèce, elle serait transportée en ∞^2 involutions distinctes par les ∞^2 transformations de 2de espèce; et, comme le groupe formé par les transformations est transitif, on aurait ainsi une série continue d'involutions *irrégulières* jouissant de la propriété que les groupes de la série qui passent par un point donné de F, *remplissent la surface.*

Cette conclusion est absurde; en effet M. Severi a montré[1] que si l'on a sur une surface une série continue d'involutions irrégulières, les groupes de celles-ci qui renferment un point donné, appartiennent tous à une même *courbe* algébrique (variable dans un faisceau irrationnel).

Partant on arrive à la conclusion que »toute involution régulière de F est transformée en elle-même par un nombre fini de transformations de 2de espèce» et réciproquement. C. Q. F. D.

33. Mais on peut en dire davantage.

En effet il est aisé de prouver que »si une involution I_n donnée sur la surface F, a l'irrégularité $d = 2$ elle demeure invariant par rapport aux ∞^2 transformations de 2de espèce de F, et réciproquement».

Soit Φ une surface image de I_n. D'après le n. 31 on a

$$p_g = 1, \qquad p_a = -1.$$

En outre Φ ne renferme pas des courbes pluricanoniques d'ordre > 0 (n. 31). On en conclût que Φ est une surface hyperelliptique de rang 1, admettant un groupe ∞^2 de transformations birationnelles en elle-même (n. 16). Entre Φ, F il y a une correspondance algébrique $[1, n]$ dépourvue de courbe de diramation; et à toute transformation birationnelle de Φ en elle-même répondent n transformations de 2de espèce distinctes de F.[2]

Ainsi I_n vient transformée en elle-même par les ∞^2 transformations; en particulier il y a parmi celles-ci n transformations qui laissent invariant chaque groupe de I_n, et engendrent l'involution au sens du n. 10.

La proposition réciproque s'établit de suite. Si I_n est transformée en elle-même par les ∞^2 transformations de 2de espèce de F, la surface Φ — image

[1] *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica S. III, t. XII, 1905).

[2] Cfr. Enriques »Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse (n. 5)» Circolo di Palermo — 14 Maggio 1905.

de I_n — admet ∞^2 transformations en elle-même; par conséquent elle a les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$, et l'irrégularité $d = 2$.

Que l'on rapproche maintenant le résultat obtenu à celui du n. 32; un raisonnement par exclusion nous permet de conclure que:

Toute involution irrégulière donnée sur F admet ∞^2 ou ∞^1 transformations de 2^de^ espèce en elle-même, suivant que son irrégularité est

$$d = 2 \quad \text{ou} \quad d = 1.$$

Le cas $d = 2$ nous ramène aux surfaces hyperelliptiques de rang 1.

Le cas $d = 1$ nous ramène à des surfaces elliptiques[1] de genre numérique $p_a = -1$ et par conséquent de genre géométrique $p_g = 0$; parmi ces surfaces nous verrons qu'il existe des surfaces qui se laissent transformer en des réglées elliptiques (cas de dégénérescence) et aussi en *des surfaces elliptiques non réductibles à des réglées.*

34. *Les involutions classifiées d'après leurs coïncidences.*

Nous allons nous placer maintenant au second des points de vue dont nous avons parlé au n. 31.

Dans une involution I_n de F, il peut exister des groupes G_n, constitués de n points qui ne sont pas tous distincts entre eux, c'est-à-dire renfermant des *coïncidences.* Or trois cas pourront se présenter.

35. *Premier cas.*

L'involution I_n possède une infinité de coïncidences, c'est-à-dire une courbe K de points de coïncidence. En ce cas nous allons prouver que *I_n est rationnelle ou peut être représentée par une surface réglée elliptique.*

Désignons par m l'ordre de la surface F, et par π le genre de ses sections planes; on aura (F ne renfermant pas des courbes exceptionnelles).

$$m = 2\pi - 2.$$

Soit

$$h(> 0)$$

l'ordre de la courbe K, et D l'ordre de la courbe décrite par les $n - 1$ points conjugués à un point (x) qui décrit une section plane de F.

[1] On appelle ainsi les surfaces admettant un groupe elliptique de transformations en elles-mêmes. Après MM. Picard et Painlevé ces surfaces ont été étudiées, notamment dans le cas $p_g = 0$, par M. Enriques (Circolo di Palermo — Marzo 1905 — l. c.).

Considérons sur la surface Φ, image de I_n, les courbes C correspondant aux sections planes de F.

Les courbes C se couperont deux à deux en $D+m$ points, chaque point commun à deux C répondant à un point commun aux sections planes homologues de F, ou bien à un groupe G_n de I_n dont un point appartient à la première de ces sections, et un autre point (conjugué au premier) appartient à la seconde.

Les courbes C auront le genre effectif π, ce genre étant égal à celui des sections de F; mais elles aurons un certain nombre de points doubles variables qui prennent naissance de la façon suivante: la courbe, d'ordre D, conjuguée à une section plane de F, rencontre cette section en D points; de ceux-ci, h tombent sur la courbe de coïncidence K; les autres $D-h$ se partagent en $\frac{D-h}{2}$ couples de points conjugués par rapport à I_n; eh bien à ces couples correspondent $\frac{D-h}{2}$ points doubles de la courbe C, homologue à la section considérée de F.

Or la série des courbes C sur Φ est rationnelle; par conséquent[1] elle appartient à un système linéaire $|C|$. Le genre II et le degré M auront respectivement les valeurs suivantes:

$$II = \pi + \frac{D-h}{2}$$

$$M = m + D = 2\pi - 2 + D$$

Pourtant on a $(h > 0)$

$$M > 2II - 2.$$

D'après un théorème de MM. Castelnuovo-Enriques[2] cela suffit pour que la surface Φ soit rationnelle ou puisse être ramenée à une surface réglée irrationnelle, qui, dans notre cas, serait une réglée elliptique, son genre numérique ne pouvant pas descendre au-dessous de -1 (n. 31).

36. *Deuxième cas.*

Il n'existe pas des coïncidences de l'involution I_n.

D'après une formule de M. Severi, on peut alors évaluer le genre numérique de la surface Φ image de I_n, qui se trouve en correspondence $[1, n]$ avec F; puisqu'il n'y a pas sur Φ des points de diramation, on trouve que ce genre numérique est

$$p_a = -1.$$

Relativement au genre géométrique, on pourra distinguer deux hypothèses:

[1] Enriques, Rendiconti di Palermo, t. X, 25 Agosto 1895.

[2] Annali di Matematica, s. III, t. 6, p. 165; 1901.

$$p_g = 1 \quad \text{ou} \quad p_g = 0.$$

Dans l'hypothèse $p_g = 1$ il y aura sur Φ une courbe canonique d'ordre zéro (n. 31) et par suite la surface résultera une surface hyperelliptique de rang 1.

Examinons ensuite l'hypothèse $p_g = 0$. La surface Φ sera une *surface elliptique* qui ne saurait pas être ramenée à une réglée.

C'est ce que l'on peut reconnaître en raisonnant par absurde. Si une surface réglée est en correspondance $[1, n]$ avec F, aux génératrices de la première surface ne sauraient répondre sur F des courbes réductibles en n parties rationnelles; partant sur une courbe homologue à une des génératrices sus-nommées, ou sur une composante irréductible de cette courbe, il y aurait des points de coïncidence.

Ajoutons que la surface elliptique Φ renferme deux faisceaux de courbes elliptiques, un parmi ceux faisceaux étant elliptique, l'autre rationnel. Cette propriété, qui découle immédiatement de la construction de la surface Φ, s'accorde avec la circonstance que nous avons reconnue au n. 31, que les plurigenres de Φ ne peuvent surpasser 1.

37. *Troisième cas — L'involution I_n possède un nombre fini de coïncidences.*

En ce cas il ne peut y avoir qu'un nombre fini de transformations de la surface F, qui laissent invariant I_n, puisque ces transformations doivent échanger entre eux les points de coïncidences. Il s'ensuit (n. 32) que Φ est régulière, et l'on a

$$p_g = p_a = 0$$

ou

$$p_g = p_a = 1.$$

En le premier cas le bigenre P_2 aura l'une des valeurs suivantes:

$$P_2 = 0$$

ou

$$P_2 = 1:$$

et lorsque $P_2 = 0$ on tombe sur des surfaces rationnelles.

38. *Involutions appartenant à une surface régulière de genres 1.*

Il nous sera utile pour la suite de considérer les involutions, et notamment les involutions de couples de points, appartenant à une surface régulière de genres

$$1 \; (p_g = p_a = P_2 = 1).$$

En classifiant ces involutions, on tombera toujours sur des surfaces régulières et on aura les trois cas possibles

$$p_a = p_g = P_2 = 0 \text{ (cas rationnel)}$$
$$p_a = p_g = 0, \qquad P_2 = 1, \qquad (P_3 = 0)$$
$$p_a = p_g = P_2 = 1.$$

Nous voulons montrer par un exemple que les deux derniers cas peuvent se presenter, tous deux, effectivement.

A cet effet considérons une surface F_8 intersection complète de trois quadriques dans un espace à 5 dimensions S_5. Il peut arriver que F_8 soit transformée en elle-même par une homographie involutoire de cet espace, et cette homographie pourra appartenir à l'une de trois espèces suivantes:

1) homologie;

2) homographie douée d'une droite de points unis qui ne coupe pas F, et d'un S_3 de points unis;

3) homographie douée de deux plans de points unis, qui ne coupent pas F.

Or l'homographie transformant F en elle-même donne lieu à une involution I_2 sur F. Eh bien, cette involution représente une surface rationnelle dans le premier cas; elle représente une surface de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$ dans le second cas; enfin elle représente une surface de genres $p_a = p_g = 0$ et $P_2 = 1$, dans le troisième cas.

Nous allons justifier ces assertions en laissant de côté le premier cas, qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté, puisqu'il suffit de répéter le raisonnement du n. 35.

En nous plaçant d'abord dans le cas 2), considérons les sections découpées sur F par les hyperplans renfermant l'axe de l'homographie. A ces sections répondrons sur la surface image de I_2 ∞^3 courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points; on en déduit que cette surface est birationnellement identique à une surface générale du quatrième ordre

$$(p_a = p_g = P_2 = 1).$$

Dans le cas 3) considérons les sections découpées sur F par les hyperplans qui renferment l'un ou l'autre parmi les deux plans de points unis. A ces courbes répondrons sur la surface image de I_2 des courbes de genre 3, qui donneront lieu à deux systèmes ∞^2 de degré 4; les courbes de l'un système couperont toute courbe de l'autre système en 4 points formant sur cette courbe un groupe de la série canonique g_4^2. Pourtant les deux systèmes seront adjoint l'un à l'autre et l'on aura $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ C. Q. F. D.

Il est à remarquer qu'entre les cas 1) 2) 3) il y a le critérium de distinction suivant: dans le cas 2) l'involution donnée sur F a un nombre fini de coïnci-

dences, dans le cas 3) l'involution n'a pas du tout de coïncidence; on en a au contraire une infinité dans le cas 1).

Or cette remarque peut être généralisée. Toute involution de couples de points donnée sur une surface régulière, F, de genres 1, peut être engendrée par une homographie sur une surface F', transformée de F, appartenant à un hyperespace convenable. On peut donc répéter pour F' les considérations que nous venons de développer ci-dessus.

On arrive ainsi, à la conclusion suivante:

Etant donnée une surface régulière de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, *on peut y avoir trois sortes d'involutions de couples de points:*

1) *involutions rationnelles* ($p_a = P_2 = 0$);

2) *involutions de genres* 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$);

3) *involutions de genre* 0 *et de bigenre* 1, *dépourvues de courbes bicanoniques d'ordre* > 0 ($p_a = p_g = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

On a une infinité de coïncidences dans le cas 1), *un nombre fini* > 0 *de coïncidences dans le cas* 2), *point de coïncidences dans le cas* 3).

IV. Théorème fondamental au sujet des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$.

39. Soit F une surface hyperelliptique de rang 1 ($p_g = 1$, $p_a = -1$). Nous avons déjà établi une distinction entre les involutions I_n qui peuvent appartenir à F, suivant qu'il existe une courbe de coïncidence, ou bien qu'il y a seulement un nombre fini $N > 0$ de points de coïncidence, ou qu'il n'y en a pas du tout ($N = 0$).

Nous allons considérer dans la suite les involutions I_n qui possèdent un nombre fini $N (\geq 0)$ de coïncidences.

Parmi ces involutions nous avons déjà considéré en particulier celles qui sont engendrées par des transformations cycliques de seconde espèce de $F (N = 0)$; ce sont des involutions représentées par des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1, ou brièvement des *involutions de rang 1.*

Or une involution I_n étant donnée sur F, deux cas peuvent se présenter:

1) il peut arriver que chaque groupe G_n de I_n soit composé par un certain nombre $r (> 1)$ de groupes G_δ de $\delta (> 1)$ points ($n = r\delta$), de façon que les groupes G_δ engendrent une involution I_δ de rang 1; en ce cas on dira que *l'involution* I_n *est composée par la* I_δ;

2) au contraire il se peut que les groupes de I_n ne soient pas composés par des groupes d'une involution de rang 1.

La même distinction peut être établie aussi de la façon suivante:

On se trouve dans le cas 1) s'il existe des transformations de 2^de^ espèce qui transforment en lui-même chaque groupe de I_n; au contraire le cas 2) correspond à l'hypothèse que de telles transformations n'existent pas.

Il y a lieu maintenant d'établir un critérium qui nous permettra de reconnaître plus aisément si une involution I_n donnée sur F est composée par une involution de rang 1.

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les n points d'un groupe G_n de I_n; d'après une locution déjà établie, deux quelconques parmi ces points sont dits *conjugués* par rapport à I_n. Si I_n est composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1, il y a en G_n des points conjugués par rapport à I_n, p.-ex. les points x_1, x_2, qui sont aussi conjugués par rapport à I_δ.

Cette hypothèse entraîne la conséquence suivante: toute transformation de 2^de^ espèce de F amène les points x_1, x_2 en des points conjugués par rapport à I_n.

En effet l'involution I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2^de^ espèce, et, comme I_n est composée par I_δ, deux points conjugués par rapport à I_δ sont aussi conjugués par rapport à I_n.

Maintenant il y a lieu de remarquer qu'il subsiste la proposition réciproque suivante.

Que l'on ait sur F une involution I_n; si deux points x_1, x_2, conjugués par rapport à celle-ci, sont transformés en des points conjugués, par toute transformation de 2^de^ espèce, l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Nous allons démontrer ce théorème.

Considérons une transformation de 2^de^ espèce, π, de F, choisie d'une façon générale; elle amenera le point x_1 en un point x'_1 et sera définie par la correspondance de ces deux points, de façon qu'on pourra la désigner en écrivant

$$\pi = (x_1 x'_1).$$

Le point x_1 appartient à un groupe G_n de I_n dont les points sont désignés par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$.

Or d'après notre hypothèse, la transformation π qui amène x_1 en x'_1, amène x_2 en un point x'_2 qui est conjugué à x'_1 par rapport à I_n. Il pourra arriver aussi que d'autres points de G_n, p. ex. $x_3, \ldots x_\delta$, soient transformés par π en des points $x'_3, \ldots x'_\delta$, conjugués à x'_1, et que cela arrive d'ailleurs quel que soit la transformation de 2^de^ espèce π.

Les points $x_1, x_2, \ldots x_\delta$ formeront en G_n un groupe G_δ qui se trouve défini de façon à satisfaire aux conditions suivantes:

a) le groupe G_δ est déterminé à partir du point x_1, que l'on peut faire varier sur F;

b) le groupe G_δ est défini d'une façon symétrique par rapport à ses points $x_1, x_2, \ldots x_\delta$, puisqu'on a

$$x = (x_1 x'_1) = (x_2 x'_2) = \cdots = (x_\delta x'_\delta).$$

Il suit que G_δ décrit, au varier de x_1, une involution I_δ par laquelle I_n résulte composée. Mais comme I_δ est transformée en elle-même par les transformations de 2^de^ espèce, elle est une involution de rang 1 (n. 32). Ainsi notre proposition se trouve établie.

40. En ce qui suit nous allons supposer que l'involution I_n douée de $N \geq 0$ points de coïncidence, que nous considérons sur la surface F, ne soit pas composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1. Ce n'est pas là une restriction essentielle que nous imposons à I_n, puisque cette condition pourra toujours être remplie en remplaçant la surface donnée par une autre surface de Picard.

Ceci posé, nous nous proposons d'établir que l'involution I_n est engendrée par n transformations birationnelles de la surface surface F en elle-même, transformations formant un groupe d'ordre n. Plus clairement nous disons que, si l'on considère les n points $x_1, x_2, \ldots x_n$ d'un groupe variable de I_n, chacun de ceux-ci dépend rationnellement de l'un des autres; p. ex. $x_2 \ldots x_n$ sont des fonctions rationnelles de x_1.

Pour arriver à cette conclusion fondamentale, nous poursuivons l'étude de l'involution I_n, en rappelant nos hypothèses fondamentales:

1) que I_n soit douée d'un nombre fini $N \geq 0$ de points de coïncidence;

2) que I_n ne soit pas composée par une involution $I_\delta (\delta > 1)$ de rang 1.

Considérons sur F un système continu complet Σ de courbes C (de genre $\pi \geq 2$) sans points-base, choisi d'ailleurs d'une façon quelconque, et construisons le système des courbes K (*conjuguées* aux C) qui sont définies de la façon suivante:

tandis qu'un point décrit une courbe C, les $n - 1$ points conjugués décrivent une courbe K, que l'on dit conjuguée à la première.

Nous nous proposons d'établir que chaque courbe K se décompose en $n - 1$ courbes, birationnellement identiques à la courbe C dont elle prend naissance. Cette conclusion, qui nous permettra de démontrer aisément le théorème fondamental que nous avons en vue, sera établie par un procédé de réduction à l'absurde. Nous supposerons d'abord que les courbes K soient (généralement) irréductibles et nous montrerons que cette hypothèse contredit à l'hypothèse 2). Ensuite nous examinerons le cas où les K seraient réductibles, mais le nombre de leurs composantes irréductibles serait $< n - 1$ et nous en tirerons la même conclusion.

41. Adoptons les hypothèse 1) 2) du n. préc. et supposons en outre que la courbe K conjuguée à une courbe C (choisie d'une façon générale en Σ), soit irréductible. Il y aura sur K une involution $\gamma^1{}_{n-1}$ de genre π (π étant le genre de C); deux points conjugués par rapport à $\gamma^1{}_{n-1}$ — c'est-à-dire deux points appartenant à un même groupe de cette série — seront conjugués aussi par rapport à l'involution I_n.

Considérons les transformations de 2[de] espèce de la surface F en elle-même. On pourra supposer: ou bien que ces transformations changent la série des courbes K en elle-même; ou bien qu'elles changent une courbe K en une nouvelle courbe K qui n'est pas conjuguée à une courbe C de notre système Σ.

Si la série des courbes K est transformée en elle-même, c'est-à-dire si une courbe K est transformée en une autre courbe K, l'involution $\gamma^1{}_{n-1}$ considerée sur la première courbe, se transformera dans l'involution $\gamma^1{}_{n-1}$ qui vient définie analoguement (par rapport à I_n) sur la seconde courbe; en effet s'il n'en était pas ainsi on trouverait qu'une courbe K, en tant qu'elle peut correspondre à une infinité de courbes analogues par les ∞^2 transformations de 2[de] espèce, renferme une infinité continue d'involutions irrationnelles $\gamma^1{}_{n-1}$, ce qui contredit à un théorème connu de MM. Painlevé, Humbert et Castelnuovo.

Il suit de cette remarque que, si la série des courbes K est transformée en elle-même par les transformations de 2[de] espèce de F, deux points situés sur une courbe K et conjugués par rapport à I_n (c'est-à-dire appartenant à un même groupe de I_n) seront amenés par toute transformation de 2[de] espèce, en des points conjugués de même par rapport à I_n; d'après le critérium établi au n. 39 cela signifie que l'involution I_n est une involution de rang 1, ou qu'elle est composée par une involution de rang 1, ce qui contredit à notre hypothèse 2).

Nous devons donc supposer qu'une transformation de 2[de] espèce (choisie d'une façon générale) change une courbe K en une nouvelle courbe $\bar{K}$ qui n'est pas conjugués à une courbe C de notre système Σ.

Construisons alors la courbe L conjuguée à $\bar{K}$ par rapport à I_n, c'est-à-dire la courbe engendrée par les $n-1$ points conjugués à un point variable sur $\bar{K}$.

La courbe $\bar{K}$ correspondant à K en une transformation de 2[de] espèce π, on peut faire varier $\bar{K}$ tout en tenant fixe K pourvu qu'on laisse varier π, et d'une façon continue on peut réduire ainsi $\bar{K}$ à K, tandis que π se réduit à la transformation identique.

Or, lorsque $\bar{K}$ variant d'une façon continue se réduit à K, la courbe L conjuguée à $\bar{K}$ variera aussi et devra se réduire à la courbe conjuguée à K, c'est-à-dire à la courbe composée $(n-2)\ K + C$.

Il s'agit de voir comment cette réduction est possible.

Supposons d'abord que la courbe L, qui tend à la limite $(n-2)K + C$, soit irréductible.

Envisageons un groupe de points de I_n dont un point se trouve sur $\bar{K}$; nous voulons désigner par x_2 ce point, et par $x_1, x_3, \ldots x_n$ les $n-1$ points conjugués qui appartiennent à L.

Si, ainsi que nous l'avons supposé, L est irréductible, on peut échanger entre eux les points x_1, x_3, en faisant décrire un cycle au point x_2 sur $\bar{K}$; il est sous-entendu que l'on envisage $\bar{K}$ comme une surface de Riemann.

Or $\bar{K}$ se réduit d'une façon continue à $\bar{K}$; le cycle décrit sur $\bar{K}$ par x_2 se réduit à un cycle sur $\bar{K}$, qui est d'ailleurs une surface de Riemann identique à K.

En force d'un *postulat de continuité* qu'on a le droit d'appliquer ici, il doit donc arriver le fait suivant: considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots x_n$ de I_n, et supposons que le premier point appartienne à la courbe C, et les autres $n-1$ points à la courbe conjuguée K; on peut faire décrire au point x_2 sur K un tel cycle que x_1 se change avec x_3.

Comment ce fait est-il possible?

Suivons par la pensée le mouvement du point x_2 qui décrit un cycle sur K, et suivons de même le chemin qui vient décrit par un point x_3 conjugué à x_2 et situé sur la même courbe K.

Pour que x_3 se change en x_1, il faut qu'il passe de la courbe K à la courbe C, et ce passage ne peut avoir lieu que par l'un des points communs à C, K. Or x_3 coïncidera avec l'un, A, de ces points, lorsque x_2 occupera la position A' d'un des points conjugués sur K; mais si on continue le mouvement de x_2 au delà de A', où se trouvera la continuation du chemin décrit par x_3? appartiendra-t-elle à K, ou bien se trouvera-t-elle sur C?

Pour éclaircir ce point, remarquons que lorsque x_2 décrit un cycle en passant par A', il y a toujours un chemin décrit par x_3 qui lui correspond et qui est situé en totalité sur K; une autre branche de la même fonction algébrique (correspondant à l'involution I_n) est la branche x_1 qui se meut sur C; pour que le chemin de x_3 se continue, en passant par A, sur C, il faut donc que cette branche x_1 aboutisse de même à A lorsque x_2 atteind A', c'est-à-dire que les deux branches x_3 et x_1 se réunissent en A; mais cela signifie qu'en A doit tomber un *point de coïncidence* de l'involution I_n.

Or cette conclusion contredit à notre hypothèse 1). En effet s'il n'y a qu'un nombre fini de points de coïncidence de I_n, une courbe C choisie d'une façon générale en Σ, n'en renferme pas.

On en déduit que la courbe L ne saurait être irréductible. Cette courbe sera donc composée et parmi ses composantes il y en aura une, que nous pouvons désigner

par X, qui renfermera un seul point x_1 parmi les conjugués à x_2; en effet si x_1 décrivait une courbe renfermant un autre parmi ses points conjugués, p. ex. x_3, il y aurait sur K un cycle de x_2 auquel correspondrait un échange entre x_1, x_3, et on en conclurait, comme avant, qu'il y aurait sur C des points de coïncidence.

Nous venons de reconnaître que L se décompose, et précisement qu'il y a une de ses composantes (X) qui est décrite simplement par le point x_1 conjugué au point x_2, se mouvant sur K. Lorsque K se réduit par continuité à K, X se réduira à C.

En effet on pourrait se douter seulement que X se réduise à $C + \theta$, θ désignant une *courbe fondamentale*, lieu des points conjugués à un *point fondamental* de I_n appartenant à K; mais une analyse approfondie porte à exclûre cette hypothèse.

Ce n'est pas qu'on ne puisse supposer *à priori* que toutes les courbes K aient communs des points fondamentaux de I_n, qui serait multiples pour les K, mais il est aisé de reconnaître que si l'on transforme un point fondamental en une courbe exceptionnelle, cette courbe ne fait pas partie de la K envisagée comme limite de K, et en conséquence la courbe θ conjugué à la courbe exceptionnelle, ne fait pas partie de la courbe limite de X, qui est simplement C et non $C + \theta$.

Ceci posé, rappelons-nous que le système Σ des C est un système continu complet; on en déduira que la courbe X, qui en variant par continuité se réduit à une C, appartient elle-même à ce système Σ. Mais cette conséquence entraîne que la courbe K, transformée d'une courbe K par une transformation de 2[de] espèce, soit le lieu décrit par un point conjugué à une courbe C, et par conséquent qu'elle appartienne au même système des K. Ce système sera donc invariant par rapport aux transformations de 2[de] espèce si, ainsi que nous l'avons supposé, les K sont irréductibles; c'est là une conclusion qui contredit à l'hypothèse 2) du n. 40, ainsi que nous l'avons remarqué.

On en conclût que *les courbes K ne sont pas irréductibles.*

42. Il faut analyser maintenant les différentes hypothèses qu'on peut faire au sujet de la décomposition des courbes K. On peut supposer:

ou bien que K se décompose en un certain nombre $h < n - 1$ de composantes $K_1, \dots K_h$;

ou bien qu'elle se décompose en $n - 1$ composantes.

Si c'est le premier cas qui a lieu, il y aura une partie irréductible de K, soit p. ex. K_1, qui renferme une involution irrationnelle $\gamma^1_r (r > 1)$ dont chaque groupe est constitué par r points conjugués de I_n.

Nous pourrons maintenant répéter pour les K_1, le raisonnement que nous avons développé avant au sujet des K.

Nous transformons les K_1 par les transformations de 2[de] espèce. Si les courbes transformées sont des courbes K_1 du même système, il s'ensuit que l'involution I_n est composée par une involution de rang 1.

Il faut donc supposer que la courbe $\overline{K}_1$, transformée d'une K_1, n'appartienne pas au système de celle-ci. Maintenant $\overline{K}_1$ peut varier par continuité se réduisant à K_1; la courbe L conjuguée à $\overline{K}_1$ se réduit alors à la courbe conjuguée à K_1, c'est-à-dire à la courbe

$$(r-1)K_1 + K_2 + \cdots + K_h + C.$$

Considérons un groupe de points $x_1, x_2, \ldots x_n$ de I_n dont un point x_2 est situé sur $\overline{K}_1$, et un point x_1 est sur C. Lorsque x_2 décrit un cycle sur $\overline{K}_1$, il n'est pas possible échanger x_1 avec un autre point x_3, du groupe, n'existant pas sur C des points de coïncidence. Mais d'un autré côté, à cause de raisons de continuité, cet échange devrait se présenter comme possible si un échange analogue a lieu sur L, c'est-à-dire si la courbe L est irréductible ou si elle ne renferme pas une composante (décrite simplement par le point x_1) qui se réduit à C lorsque $\overline{K}_1$, se réduit à K_1.

On en conclût que L est réductible et renferme une composante appartenant au système complet Σ des C; et il s'ensuit que $\overline{K}_1$, est une partie de la courbe conjugué à une C et qu'elle appartient au même système que K_1, c'est-à-dire que le système des K_1 est invariant par rapport aux transformations de 2[de] espèce. C'est là une conclusion absurde, ainsi que nous l'avons déjà remarqué.

Cet absurde prouve que *la courbe K conjuguée à une C par rapport à I_n, se décompose en $n-1$ parties décrites simplement par les $n-1$ points conjugués à celui qui se meut sur C, et par conséquent birationnellement identiques à C.*

43. Il est aisé maintenant d'achever la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Supposons que Σ soit du type envisagé aux nn. 21, 25 et considérons en Σ les ∞^1 courbes C passant par un point x_1; les courbes conjuguées à ces C se décomposent en $n-1$ parties $C', \ldots C^{(n-1)}$, qui passent respectivement par les points $x_2, \ldots x_n$ du groupe de I_n déterminé par x_1.

Or un point quelconque P de la surface F appartient à un nombre fini de courbes C par x_1, courbes qui, se coupant en ce point, servent à le déterminer; aux C par P correspondent des C' par x_2 se coupant en un point conjugué P' qui se meut avec P et résulte ainsi dépendre rationnellement de P.

On voit d'ailleurs que cette correspondance rationnelle fait correspondre au point x_1, le point x_2.

On arrive ainsi à la conclusion suivante:

Toute involution I_n appartenant à une surface hyperelliptique F de rang 1 et satisfaisant aux hypothèses 1), 2) du n. 40, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même; ces transformations amènent un point quelconque de la surface F respectivement en ses $n-1$ conjugués par rapport à I_n.

44. *Théorème fondamental.*

Le théorème que nous venons d'établir peut être énoncé sous une autre forme comme une propriété fondamentale des surfaces hyperelliptiques.

D'après les nn. 6, 35 toute surface hyperelliptique Φ de rang $r(>1)$ et de diviseur δ, correspond à une involution I_n d'ordre $n=r\delta$ appartenant à une surface de Jacobi F, et possédant un nombre fini $N \geq 0$ de points de coïncidence (les surfaces rationnelles et les réglées elliptiques étant laissées de côté d'après le n. 4). Lorsque $\delta=1$ l'involution I_n remplit les conditions 1) 2) demandées par le théorème précédent. Si au contraire $\delta>1$ l'involution I_n résulte composée par une involution I_δ de rang 1; cette involution I_δ vient représentée par une surface de Picard F_δ, et l'on a sur F_δ une involution I_r d'ordre r dont les groupes correspondent aux points de la surface Φ, et qui remplit les mêmes conditions 1) 2).

On a donc le théorème fondamental suivant:

Toute surface hyperelliptique de rang $r>1$ et de diviseur δ correspond à une involution engendrée par un groupe de r transformations birationnelles sur une surface de Picard F_δ.

C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la façon suivante:

Soit $\Phi(x,y,z)=0$ une surface hyperelliptique, et supposons que, les x, y, z étant des fonctions abéliennes de deux paramètres u, v, il arrive qu'à tout groupe de valeurs de x, y, z, correspondent r couples (u,v) incongrus par rapport aux périodes primitives, soit:

$$(u_1, v_1), \quad (u_2, v_2), \ldots (u_r, v_r);$$

en ce cas les u, v seront liées par $r-1$ substitutions linéaires

$$\left.\begin{aligned} u_i &= a_i u_1 + b_i v_1 + c_i \\ v_i &= d_i u_1 + e_i v_1 + f_i \end{aligned}\right\} \qquad i=2, 3, \ldots r$$

dont les coefficients ne dépendent pas de x, y, z.

Ces substitutions, ajoutée la substitution identique, forment un groupe d'ordre r; et les constantes a_i, b_i, d_i, e_i, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes.

V. Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.

45. *Surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ dépendant de trois modules arbitraires.* D'après le théorème fondamental du n. 44, la détermination des familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques, se trouve ramenée à celle des groupes finis de transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique de rang 1 en elle-même.

On se rattache ainsi à la théorie des transformations des fonctions abéliennes de genre 2, théorie qui a pris naissance dans les Notes classiques de HERMITE (1855)[1] et qui a été développée successivement par les recherches de MM. FROBENIUS, WEBER, HURWITZ, WILTHEISS, HUMBERT,[2] ce dernier ayant considéré les transformations dans toute leur généralité, ainsi que nous aurons lieu de le rappeler dans la suite.

Rappelons d'abord le résultat auquel on est amené dans le cas où les modules sont arbitraires.

Soit F une surface de Jacobi, et u, v les integrales normales de 1re espèce attachées à F. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la substitution linéaire

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

établisse une transformation rationnelle de la surface F en elle-même, de sorte que les coordonnées du point (u', v') soient des fonctions rationnelles des coordonnées du point (u, v), est que u', v' augmentent d'une des périodes simultanées, lorsque u, v augmentent d'une telle période. Soit

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v: alors la condition précédente peut s'exprimer sous forme analytique en écrivant les relations:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= a_0 + a_3 g + a_2 h & \mu &= b_0 + b_3 g + b_2 h \\ \lambda' &= a_1 + a_3 h + a_2 g' & \mu' &= b_1 + b_3 h + b_2 g' \\ \lambda g + \mu h &= d_0 + d_3 g + d_2 h & \lambda h + \mu g' &= c_0 + c_3 g + c_2 h \\ \lambda' g + \mu' h &= d_1 + d_3 h + d_2 g' & \lambda' h + \mu' g' &= c_1 + c_3 h + c_2 g' \end{aligned}\right.$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont 16 *entiers caractéristiques* de la transformation.

[1] Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. XL.

[2] Journal de mathématiques (1899—1900—1901—1903—1904—1906).

Si l'on veut exprimer que la transformation est birationnelle, on doit supposer que la valeur du déterminant (*degré* de la transformation):

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

soit égale à ± 1.[1]

En éliminant les constantes λ, λ', μ, μ' entre les équations (1), on a les relations

$$(A) \qquad g^2 a_3 + gh(a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g(a_0 - d_3) + h(b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$(B) \qquad gh a_3 + gg' a_2 + h^2 b_3 + hg' b_2 + g a_1 + h(b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0$$

$$(C) \qquad gh a_3 + gg' b_3 + h^2 a_2 + hg' b_2 - g c_3 + h(a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0$$

$$(D) \qquad h^2 a_3 + hg'(a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h(a_1 - c_3) + g'(b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

Si les périodes g, h, g' sont arbitraires, ces relations se réduisent à des identités et l'on tombe sur les transformations

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

de 1re et de 2de espèce.

Nous les appelerons les *transformations ordinaires* de la surface F en elle-même, car *elles existent sur F pour toute valeur des modules.*

Si au lieu de considérer une surface de Jacobi, on se rapporte à une surface de Picard F_δ de diviseur $\delta > 1$, on arrive de même à la conclusion que, pour des modules arbitraires, cette surface ne saurait admettre d'autres transformations en elle-même que les *transformations ordinaires*:

$$u' = \pm u + \text{const.}$$
$$v' = \pm v + \text{const.}$$

Or parmi ces transformations, celles qui sont (périodiques) de 2de espèce nous amènent à des nouvelles surfaces hyperelliptiques de rang 1 (n. 11), ainsi donc les seules transformations correspondant à des surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, seront les transformations de 1re espèces, que l'on peut toujours réduire à la forme

$$u' = -u, \qquad v' = -v.$$

[1] Il faut toujours prendre la valeur $+1$, lorsque, ainsi que nous le supposons, on a entre les parties imaginaires des périodes, l'inégalité classique $g_1 g_1' > h_1^2$. Voir Humbert, Journal de Math., 1900, p. 291.

On en déduit le théorème suivant:

Il n'y a d'autres surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, dépendant de trois modules arbitraires, que des surfaces régulières de rang $r = 2$. Ces surfaces peuvent être représentées en exprimant les coordonnées de leurs points par des fonctions hyperelliptiques paires, d'ailleurs arbitraires. Elles se partagent en une infinité de familles birationnellement distinctes, d'après la valeur du nombre entier δ qui en est le diviseur.

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ ont été l'objet d'études classiques (Kummer, Weber, Humbert); le cas $\delta > 1$ a appelé récemment l'attention de MM. Traynard et Remy.

46. *Surfaces de* Kummer. Nous allons considérer d'abord les surfaces régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$; s'il n'y aura ici rien d'essentiel à ajouter aux résultats connus, nous aurons au moins l'occasion de développer la méthode que nous employerons dans la suite pour étudier les cas nouveaux qui se présentent pour $r > 2$.

Remarquons d'abord que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$, correspond à une involution de couples de points appartenant à une surface de Jacobi et représentée sur celle-ci par

$$(2) \qquad u + u' = \lambda, \qquad v + v' = \mu$$

(λ, μ constantes).

Ceci posé considérons sur F le système fondamental Σ constitué de ∞^2 courbes C de genre 2, se coupant deux à deux en 2 points (n. 21).

Nous allons supposer d'abord que les C soient irréductibles, ce qui est le cas général.

Le système Σ est transformé en lui-même par toute involution du type (2). Ainsi si l'on se donné une involution I_2 de ce type, il y aura ∞^2 couples de courbes C conjuguées par rapport à I_2. Construisons une surface Φ image de I_2, dont les points correspondent *sans exception* aux couples de cette involution. Aux courbes C répondront sur Φ des courbes K; chaque K représentera deux C conjuguées par rapport à I_2.

Il est aisé de reconnaître que deux courbes K se coupent en 4 points, puisque deux couples de courbes C sur F ont communs 8 points (qui se partagent ici en 4 couples de I_2). De même on voit que les courbes K (dont le genre est 2 comme celui des C) ont un point double variable; en effet toute K renferme un point double correspondant au couple de I_2 qui est commun aux deux C homologues à K et conjuguées entr'elles par rapport à I_2.

La surface Φ étant régulière, c'est-à-dire dépourvue d'intégrales simples, on aura d'après une remarque de M. Humbert, que les ∞^2 courbes K, tracées

sur Φ, appartiennent à un système linéaire sans points base, de courbes de genre 3 se coupant deux à deux en 4 points.

On peut même supposer que les courbes de ce système ∞^3 soient les sections planes de la surface Φ. En effet il est aisé de reconnaître que, étant excepté le cas de la surface de Jacobi particulière associée à une courbe réductible, les courbes K passant par un point de Φ ne renferment pas en conséquence d'autres points variables avec celui-là, et par suite on peut toujours transformer la surface choisie comme image de I_2, de façon que courbes K viennent coupées par des plans.

Alors la surface Φ sera du quatrième ordre à sections planes de genre trois (c'est-à-dire dépourvue de courbes multiples); les ∞^2 courbes K qui répondent aux C de F, seront les sections découpées sur Φ par les plans tangents.

En outre Φ aura des points doubles qu'on déterminera de la façon suivante:

Il y a sur F 16 points de coïncidence de l'involution I_2 qui tombent dans les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \qquad \frac{\mu + \omega_2}{2},$$

ω_1 et ω_2 désignant un couple de périodes simultanées des intégrales u, v.

A chacun de ces points correspond un point de Φ dont nous allons calculer la multiplicité.

A cet effet considérons le système linéaire $|K|$ formé par les sections planes de Φ. A ce système correspond sur F un système linéaire auquel appartiennent les ∞^2 couples de courbes $C + C'$ de Σ, conjuguées par rapport à l'involution I_2; système linéaire qu'on pourra désigner par

$$|D| = |C + C'|.$$

Ceci posé, considérons les ∞^1 couples de courbes $C + C'$ qui passent par un point uni P de I_2. Il a lieu de rappeler que les ∞^1 courbes C par P forment une série d'éléments de genre 2, et que dans cette série il y a *une* g_2^1, qui est constituée par les ∞^1 couples de courbes C se touchant en P; on en conclût que, les ∞^1 couples $C + C'$ formant aussi une g_2^1, sont constituées de courbes tangentes en P.

Il s'ensuit que le système linéaire ∞^2 des courbes D passant par P, a en P un point-base double, de sorte que deux courbes de ce système se coupent hors de P en $8 - 4 = 4$ points mobiles. Par conséquent aux courbes D par P correspondent sur Φ des courbes de $|K|$ par un point P', se coupant deux à deux hors de P' en $^4/_2 = 2$ points mobiles; ainsi donc P' est un point double de Φ.

On reconnaît aisément qu'il s'agit d'un point double conique, parce que toute courbe D, arbitrairement choisie parmi celles qui passent par P, a en P deux branches distinctes, auxquelles correspondent deux branches distinctes de la section plane homologue de Φ, et parce que d'un autre côté le cône tangent à Φ en P' correspond élément par élément au domaine de P sur F et il est en conséquence irréductible.

Nous venons de reconnaître qu'aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F, répondent 16 *points doubles coniques de* Φ.

Il y a lieu maintenant de rappeler le principe de dualité que nous avons établi au n. 23.

Le système Σ des courbes C constitue une variété ∞^2 d'éléments, birationnellement identique à la surface F, et transformée en elle-même par l'involution I_2; aux couples de C conjuguées correspondent les sections de Φ par les plans tangents, qui forment une variété identique à la surface Φ elle-même.

Il y aura donc 16 courbes C de coïncidence, transformées en elles-mêmes par I_2, auxquelles répondront 16 *plans singuliers qui touchent* Φ *suivant des coniques.*

On trouvera d'ailleurs aisément que: toute courbe C de coïncidence renferme 6 points de coïncidence de I_2 (puisqu'une g_2^1 sur une courbe de genre deux a justement 6 coïncidences); par dualité tout point de coïncidence appartiendra à 6 courbes C de coïncidence.

Deux C de coïncidence se couperont en 2 points de coïncidence, et réciproquement deux points de coïncidence appartiendront à 2 courbes C de coïncidence, etc.

Ces propriétés se réflechissent en des propriétés analogues des 16 points doubles et des 16 plans tangents suivant des coniques de la surface Φ; on a ainsi les propriétés bien connues des points et des plans singuliers d'une *surface de Kummer.*

Ces propriétés trouvent leur expression la plus simple en une représentation symbolique qui a été introduite par M. Humbert, et qui est la suivante.

Considérons les deux séries de nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad \text{et} \quad 1',\ 2',\ 3',\ 4',$$

et désignons par α, β, γ, δ les nombres de la première série pris suivant un ordre quelconque, et analoguement par α', β', γ', δ' les nombres de la seconde série.

On peut représenter les 16 plans singuliers de Φ par

$$\alpha\alpha', \alpha\beta', \ldots, \beta\alpha', \beta\beta', \ldots,$$

et les 16 points doubles par

$$(\alpha\alpha'), (\alpha\beta'), \ldots, (\beta\alpha'), (\beta\beta'), \ldots,$$

de façon que

1) les six plans singuliers par les points $(\alpha\alpha')$ soient $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\alpha'\beta$, $\alpha'\gamma$, $\alpha'\delta$ etc.;

2) corrélativement les six points doubles appartenant au plan $\alpha\alpha'$ soient $(\alpha\beta'), (\alpha\gamma'), (\alpha\delta'), (\alpha'\beta), (\alpha'\gamma), (\alpha'\delta)$ etc.

Remarque. Ce même symbolisme sert à représenter la configuration des points et des courbes de coïncidence de l'involution I_2 sur F.

47. *Cas de dégénérescence.* Nous venons d'établir le théorème connu qu'on peut énoncer de la façon suivante:

Toute surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$ est birationnellement identique à une surface de Kummer du quatrième ordre, douée de 16 points doubles et de 16 plans tangents suivant des coniques, qui forment la configuration bien connue.

Il y a pourtant un cas d'exception, dans lequel la surface de Kummer Φ se réduit à une quadrique double Q, douée d'une courbe de diramation.

C'est le cas où l'on part d'une surface de Jacobi qui représente les couples de deux courbes elliptiques.

Alors les courbes C de Σ sont réductibles; chacune se compose d'une courbe elliptique C_1 et d'une courbe elliptique C_2 se coupant en un point; et C_1 et C_2 appartiennent respectivement à deux faisceaux elliptiques. Si l'on construit, comme avant, une surface Φ image de I_2, on trouve sur Φ deux faisceaux linéaires de courbes elliptiques K_1, K_2, homologues aux C_1, C_2 respectivement; une K_1 et une K_2 se coupent en 2 points. Or les ∞^2 courbes $K_1 + K_2$ seront renfermées en un système ∞^3 de courbes K de genre 3, se coupant deux à deux en 4 points; mais il est aisé de voir:

1) que les K sont des courbes hyperelliptiques, puisqu'elles sont coupées en 2 points par les courbes du faisceau $|K_1|$ ou par les courbes de $|K_2|$;

2) que par conséquent les courbes K passant par un point de Φ passent par un point conjugué, deux points étant conjugués lorsqu'ils sont communs à une K_1 et à une K_2;

3) qu'à cause de cette circonstance la surface transformée de Φ ayant comme sections planes les courbes K, se réduit à une quadrique double Q, ainsi que nous l'avons énoncé.

Quant à la courbe de diramation sur Q, on voit d'abord qu'elle est d'ordre 8, coupant les droites des deux systèmes (génératrices et directrices) de la quadrique également en 4 points.

Il y a sur F 16 points de coïncidence de I_2, et il y a 4 courbes de coïncidence C_1 et 4 C_1, qui se coupent en ces 16 points.

Or aux 4 C_1 répondent 4 droites, soit 4 génératrices de Q, aux 4 C_2 quatres directrices de la même quadrique. Eh bien, il est aisé de reconnaître que ces 8 droites forment la courbe de diramation de la surface Q, regardée comme une image double de Φ.

48. *La surface hyperelliptique* $(r=2, \delta=1)$ *représentée sur un plan double.* La surface de Kummer peut être projetée par un de ses points doubles sur un plan; on peut la transformer ainsi en un *plan double*, c'est-à-dire en une surface de la forme

$$z^2 = f(x,y);$$

la courbe de diramation du plan doubles,

$$f = 0,$$

se compose de 6 droites tangentes à une même conique C.

En cette représentation se trouve renfermé aussi le cas particulier que nous venons de considérer; il correspond à une dégénérescence de la conique C, considérée comme enveloppe, c'est-à-dire au *cas où* $f=0$ *se compose de deux ternes de droites passant respectivement par deux points.*

49. *La surface du quatrième ordre hyperelliptique caractérisée par ses points doubles.* Nous venons de reconnaître que toute surface hyperelliptique régulière de rang $r=2$ et de diviseur $\delta=1$, peut être transformée en une surface de Kummer du 4^{me} ordre à 16 points doubles et 16 plans singuliers; fait exception le cas particulier où la surface de Kummer se réduit à une quadrique double.

Or il y a lieu de rappeler que »toute surface du quatrième ordre possédant 16 points doubles, possède aussi 16 plans tangents suivant des coniques, plans qui forment avec les 16 points la configuration de Kummer, que nous avons définie».

C'est là une conséquence immédiate de ce fait, que en projetant la surface donnée Φ par un de ses 16 points doubles sur un plan double, on a sur celui-ci une courbe de diramation douée de 15 points doubles, qui se décompose en 6 droites. En effet il suit de cette remarque que pour chacun des 16 points doubles de Φ il passe 6 plans tangents suivant des coniques, renfermant chacune 6 points doubles; et partant il y a 16 plans singuliers.

Or la configuration formée par ces plans en union aux 16 points doubles de Φ, jouit des propriétés connues de la configuration de Kummer, propriétés que l'on peut exprimer au moyen du symbolisme de M. HUMBERT, et qui découlent, de la propriété fondamentale établie, savoir que:

il y a 6 plans singuliers par chaque point double.	il y a 6 points doubles sur chaque plan singulier.

Ceci posé, considérons la série des surfaces du quatrième ordre (de Kummer) douées de 16 points doubles. Cette série est ∞^3 et elle est *irréductible*; ainsi toute surface Φ dépend exclusivement de *trois modules*.

En supposant ce point bien établi, il en résulte que toute surface Φ est une surface hyperelliptique de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 1$.

Partant, si l'on se donne une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles, il doit être possible de construire une surface de Jacobi F dont Φ est une transformée rationnelle, et telle que les coordonnées de ses points s'expriment par celles des points de Φ à l'aide d'une racine carrée.

Nous allons montrer comment on peut effectuer cette construction. Celà signifie que nous nous proposons le problème suivant:

Etant donnée une surface du quatrième ordre Φ douée de 16 points doubles et par conséquent aussi de 16 plans tangents suivant des coniques (points et plans formant la configuration de Kummer), il s'agit d'exprimer les coordonnées des points de Φ par des fonctions Θ de deux paramètres.

Ce problème peut être résolu par le procédé qui suit.

Soit

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation homogène de la surface donnée.

Considérons une forme algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

de degré pair $2n$, que nous allons déterminer dans la suite, et construisons dans l'espace à 4 dimensions $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4\, y_5)$ la surface F qui est définie par

$$y_1 = x_1^n, \quad y_2 = x_2^{n-1} x_1, \quad y_3 = x_3^{n-1} x_1, \quad y_4 = x_4^{n-1} x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}.$$

Cette *surface est* représentée sur la *surface double Φ; la courbe de diramation* est donnée par $f = 0$; toutefois il faut retrancher de l'intersection de $f = 0$, $\Phi = 0$, les parties qui comptent doubles.

Nous tâcherons de déterminer f de façon que la surface double Φ ne possède d'autres points de diramation que ses 16 points doubles, et nous montrerons qu'en ce cas la surface F est une surface hyperelliptique de rang 1 (ainsi donc, d'après nos hypothèses, une surface de Jacobi).

Il y a lieu de supposer d'abord que f ne renferme pas comme facteur une forme algébrique des x à une puissance supérieure à la première.

Ceci posé considérons l'intersection de $f=0$, $\Phi=0$:

1) Si parmi les composantes de cette courbes il y en a une comptée $2s$ fois, cette composante ne fait pas partie de la courbe de diramation; s'il y a une composante comptée $2s+1$ fois, celle-ci doit être comptée comme si elle était simple.

2) Si $f=0$ renferme un point double, O, de Φ, et si toute droite du cône tangent par O a, en O, s intersections avec $f=0$, il arrive que le domaine du point O sur Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite de Φ, lorsque s est impair; au contraire si s est pair, ce même domaine ne constitue pas une courbe de diramation de Φ.

Cette remarque se ramène à la première en effectuant une transformation birationnelle de l'espace (x), de façon que le point O soit transformé en une courbe.

3) La surface F peut être réductible en deux parties dont chacune soit représentée simplement sur Φ. En ce cas il n'y a pas des points de diramation sur la surface double Φ.

Ceci posé, rappelons les propriétés de la configuration de Kummer appartenant à Φ. On sait qu'il y a des tétraèdres de Rosenhaim se composant de 4 plans tangents suivant des coniques, qui renferment dans leur ensemble les 16 points doubles de la surface.

On peut supposer d'avoir pris un tétraèdre de Rosenhaim comme tétraèdre fondamental pour le système des coordonnées auxquelles nous nous rapportons, soit

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Posons

$$f = x_1 x_2 x_3 x_4$$

et considérons la surface F définie par les équations

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2 x_1, \quad y_3 = x_3 x_1, \quad y_4 = x_4 x_1, \quad y_5 = \sqrt{f}. \tag{3}$$

Comme $f=0$ est tangent à Φ suivant les 4 coniques situées dans les plans

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

on voit que ces coniques ne sont pas des courbes de diramation de la surface double Φ, leurs points étant des points critiques apparents.

Au contraire $f=0$ a en chaque point double de Φ une multiplicité 1 ou 3, et n'a aucun contact particulier avec les droites du cône tangent à Φ en ce

point; ainsi donc le domaine de tout point double de Φ doit être regardé comme une courbe de diramation infiniment petite.

Il s'ensuit d'abord que la surface F décrite par le point (y) est irréductible.

Evaluons les genres de F.

D'abord on aura

$$p_g = P_2 = P_3 \ldots = 1;$$

c'est là une conséquence immédiate de ce qu'aux sections planes de Φ correspondent sur F des courbes de genre 5 se coupant deux à deux suivant de groupes canoniques de 8 points. Aux courbes de diramation infiniment petites constituées par les domaines des points doubles de Φ, répondrons sur la surface F, ou sur une transformée de celle-ci, des points simples ou des courbes exceptionnelles.[1]

Pour calculer le genre numérique p_a de F, nous considérerons l'invariant de Zeuthen-Segre

$$I = 12\,p_a - p^{(1)} + 9$$

où (étant $P_i = 1$) le genre linéaire

$$p^{(1)} = 1.$$

La valeur de cet invairant pourra être déduite de celle qui appartient à l'invariant analogue de Φ, qui est

$$I' = 20.$$

On sait que l'invariant I' peut être évalué de la façon suivante:

Considérons un faisceau de sections planes C de la surface Φ. Elles sont de genre $\pi = 3$ et il y a $n = 4$ points-base, partant

$$I' = \delta - n - 4\pi = \delta - 16;$$

δ désigne ici le nombre des courbes C douées d'un point double, mais les sections planes C qui passent par un point double de Φ comptent deux fois dans ce nombre.

Ainsi on a

$$\delta = 2 \cdot 16 + \delta',$$

où $\delta' = 4$ est la classe de la surface, et on retrouve la valeur de I':

$$I' = 20.$$

Aux courbes C correspondent sur F des courbes K de genre $\Pi = 5$; formant

[1] Autrement ces courbes seraient des courbes canoniques proprement dites (Enriques »Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche« Accad. Torino Mem. 1893, VI) tandis que F ne renferme pas de telles courbes ($P_i = 1$).

un faisceau qui a $N = 8$ points-base. On aura

$$I = \Delta - N - 4H = \Delta - 28,$$

où Δ désigne le nombre des courbes K de notre faisceau qui sont douées d'un point double.

Or, parmi ces courbes K, il y en a d'abord $\delta' = 4$ douées chacune de 2 points doubles, correspondant au point double de la courbe homologue C; en second lieu il y a 16 K correspondant aux C qui passent par les points doubles de Φ, et douées chacune d'un point double tombant en un point simple de F (ou d'une surface transformée de celle-ci). Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot 4 + 16 = 24 \\ I &= -4 \qquad\qquad (= 12 p_a + 8) \\ p_a &= -1. \end{aligned}$$

On conclût que la surface F, ayant les genres

$$p_a = -1, \quad p_g = P_4 = 1,$$

est une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16).

Ainsi notre problème se trouve résolu, au moins théoriquement. En effet il est aisé d'exprimer les coordonnées des points de Φ en renversant les formules (3), ce qui se fait rationnellement; en suite il faudra construire les deux intégrales simples de première espèce u, v attachées à F; les coordonnées des points de Φ seront des fonctions hyperelliptiques de u, v.

50. *Surfaces hyperelliptiques de diviseur* $\delta > 1$. Passons maintenant aux surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$.

Toute surface Φ de cette espèce correspond à une involution I_2 sur une surface hyperelliptique de rang 1 et de diviseur δ.

L'involution I_2 est engendrée par une transformation de 1^re^ espèce:

$$\begin{aligned} u + u' &\equiv \lambda \\ v + v' &\equiv \mu, \end{aligned}$$

par rapport aux périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g'. \end{matrix}$$

Par conséquent on a, comme pour $\delta = 1$, 16 points de coïncidence de I_2 qui tombent en les points

$$\frac{\lambda + \omega_1}{2}, \quad \frac{\mu + \omega_2}{2}. \qquad (\omega_1, \omega_2 \text{ périodes simultanées})$$

Or il y a sur F_δ un système ∞^2 de courbes C_δ de genre 2, douées de $\delta - 1$ points doubles, se coupant deux à deux en 2δ points. Ce système est invariant par rapport à toute involution I_2 de 1re espèce.

Aux couples de courbes C_δ conjuguées par rapport à I_2, correspondent, sur une surface Φ image de I_2, des courbes de genre 2, se coupant deux à deux en 4δ points et douées de $2\delta - 1$ points doubles. La surface Φ étant régulière, ces courbes seront renfermées dans un même système linéaire $\infty^{2\delta+1}$ de genre $2\delta + 1$ et de degré 4δ.

On peut supposer que Φ soit transformée en une surface de l'espace $S_{2\delta+1}$ de telle façon que ses sections hyperplanes soient les courbes de genre 2 que nous venons de nommer.

Alors Φ sera une surface d'ordre 4δ, dont les sections hyperplanes sont des courbes canoniques; elle aura 16 points doubles correspondant aux 16 points de coïncidence de I_2 sur F_δ.

Il y aura en outre 16 hyperplans singuliers touchant Φ suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces hyperplans correspondent aux 16 courbes C_δ qui sont transformées en elles-mêmes par I_2.

Les points et les hyperplans singuliers de la surface Φ en $S_{2\delta+1}$ formeront une configuration qui pourra être représentée par le même symbolisme de M. Humbert, que nous avons adopté pour la configuration de Kummer. Ce symbolisme exprime en effet les propriétés fondamentales suivantes: tout hyperplan singulier renferme 6 points doubles, deux hyperplans ont communs (outre que $\delta - 1$ points simples de la surface) deux points doubles et correlativement. A ce symbolisme on est aussi amené par la représentation paramétrique de la surface. C'est ce qu'on exprimera en disant que ces points et ces hyperplans forment une *configuration semblable* à celle de Kummer.

Ainsi nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Toute surface hyperelliptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ à sections de genre $2\delta + 1$ en $S_{2\delta+1}$, surface possédant 16 points doubles et 16 hyperplans singuliers qui la touchent suivant des courbes rationnelles normales d'ordre 2δ; ces 16 points et ces 16 hyperplans singuliers forment une configuration semblable à celle de Kummer pour $\delta = 1$. C'est pourquoi on dira aussi que Φ est une *surface de Kummer généralisée.*

Remarque. Il est aisé de reconnaître que pour $\delta > 1$ la surface Φ ne dégénère pas en une surface double, même dans le cas auquel donne naissance une courbe de genre 2 réductible.

51. *La surface hyperelliptique d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$ caractérisée par ses points et ses hyperplans singuliers.* Nous venons de prouver que toute surface hyperel-

liptique régulière de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ peut être transformée en une surface d'ordre 4δ de $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers, qui touchent la surface suivant des courbes rationnelles d'ordre 2δ formant une configuration semblable à celle de Kummer.

Il y a lieu d'établir la proposition réciproque suivante, qui est d'ailleurs analogue à celle que nous avons établie pour $\delta = 1$.

Toute surface $\Phi_{4\delta}$ d'ordre 4δ en $S_{2\delta+1}$, douée de 16 points doubles et de 16 hyperplans singuliers formant une configuration semblable à celle de Kummer, est une surface hyperelliptique de rang 2 et de diviseur δ.

Il suffit de répéter ici la démonstration que nous avons développée pour $\delta = 1$. On construira ainsi une surface F représentée sur $\Phi_{4\delta}$ comptée deux fois, où il y aura 16 points de diramation qui tomberont en les 16 points doubles; il s'ensuivra que la surface F aura le genre géométrique $p_g = 1$ et le genre numérique $p_a = -1$. Comme il n'y aura pas d'ailleurs des courbes pluricanoniques, F sera une surface hyperelliptique de rang 1 (n. 16). Quant à son diviseur il est aisé de reconnaître qu'il aura la valeur δ, ou tout au moins qu'il sera $\leq \delta$.

La surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ peut être caractérisée aussi d'une autre façon remarquable. Rappelons d'abord que le système linéaire des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$ correspond à un système linéaire de F_δ auquel appartiennent les couples de courbes $C_\delta + C'_\delta$ conjuguées par rapport à l'involution I_2, système qu'on peut désigner par $|C_\delta + C'_\delta|$.

Or ce système est renfermé dans un système linéaire complet $|2C_\delta|$ qui a la dimension $4\delta - 1$.

On peut supposer que le système $|2C_\delta|$ soit découpé sur F_δ par les hyperplans d'un espace $S_{4\delta-1}$. Alors l'involution I_2 sera engendrée par une homographie de cet espace, homographie qui laisse invariant la surface F_δ.

Parmi les hyperplans de $S_{4\delta-1}$, il y en a $\infty^{2\delta+1}$ découpant sur F_δ les courbes du système $|C_\delta + C'_\delta|$; ce sont des hyperplans doubles pour notre homographie involutoire. Il y aura donc une seconde série $\infty^{2\delta-3}$ de hyperplans doubles coupant sur F_δ $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies par rapport à I_2.

Ces $\infty^{2\delta-3}$ courbes unies forment un système linéaire qui a 16 points-base, tombant en les 16 points doubles de I_2.

En correspondance à ces courbes on a sur $\Phi_{4\delta}$ un système linéaire de courbes passant par les 16 points doubles de la surface, et telles que comptées deux fois appartiennent au système complet double de celui qui est découpé par les hyperplans. En se rappelant que ce système double est découpé tout entier par les quadriques de $S_{2\delta+1}$,[1] on voit que les courbes nommées ci-dessus sont

[1] Cfr. Enriques »Ricerche . . .» l. c. (§ V, 5.

des courbes de contact de $\infty^{2\delta-3}$ quadriques passant par les 16 points doubles de la surface.

Ainsi donc:

Toute surface hyperelliptique $\Phi_{4\delta}$ *de* $S_{2\delta+1}$ $(\delta > 1)$ *possède* $\infty^{2\delta-3}$ *quadriques passant par ses 16 points doubles, qui la touchent suivant une courbe d'ordre* 4δ.

Réciproquement toute surface d'ordre 4δ *de* $S_{2\delta+1}$ *à sections de genre* $2\delta+1$, *possédant 16 points doubles et une quadrique tangente suivant une courbe d'ordre* 4δ *qui passe par ces points, est une surface hyperelliptique.*

En effet en désignant par $x_i (i = 1, 2, \ldots 2\delta + 2)$ les coordonnées homogènes des points de la surface, et étant $f(x_i) = 0$ l'équation de la quadrique considérée, on voit que la surface

$$y_i = x_i, \; y_{2\delta+3} = \sqrt{f}$$

est une surface hyperelliptique de rang 1

$$(p_a = -1, \; p_g = P_4 = 1).$$

Maintenant une question se pose: l'existence de quadriques tangentes qui passent par les 16 points doubles de la surface $\Phi_{4\delta}$, ne serait-elle une conséquence de ce que la surface possède 16 points doubles?

S'il en est ainsi les surfaces hyperelliptiques $\Phi_{4\delta} (p_a = p_g = P_2 = 1)$ seraient caractérisées tout simplement par la propriété d'avoir 16 points doubles, ainsi que celà arrive pour $\delta = 1$.

Nous croyons qu'on doit répondre par l'affirmative à la demande posée dessus. Cependant pour établir ce beau théorème, il faudrait pouvoir calculer en général le nombre des modules dont dépendent les différentes familles de surfaces de genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, familles qui se distinguent d'après la valeur d'un entier.[1]

Or c'est là une question délicate qui demeure en suspens.

Partant nous nous bornerons à remarquer que:

Toute surface d'ordre 8 de S_5, *ayant les sections hyperplanes de genre 5, et possédant 16 points doubles, est une surface hyperelliptique.*

C'est ce qui découle d'un compte de modules, qui se fait ici d'une façon immédiate. En effet les surfaces d'ordre 8 dont il est question, sont chacune intersection complète de trois quadriques, c'est-à-dire surfaces-base d'un réseau; un tel réseau dépend de 19 invariants (modules de la surface-base); 16 points doubles entraînent autant de conditions, ce qui réduit à 3 le nombre des modules.

52. *Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre* $(\delta > 1)$. Les surfaces hyperelliptiques régulières de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$ ont été l'objet de plusieurs

[1] Cfr. Enriques »Ricerche ...« l. c. (§ III, 6.)

Notes et d'un Mémoire de M. TRAYNARD,[1] qui en se plaçant dans les premiers cas $\delta = 2, 3, 4$, a étudié notamment les surfaces d'ordre 4 que l'on obtient par projection des surfaces $\Phi_{4\delta}$ considérées ci-dessus.

D'autres remarques concernant ces mêmes surfaces ont été faites par M. REMY,[2] qui en particulier a rencontré toute une série dénombrable de surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$, se ramenant à des surfaces d'ordre 4 douées de 15 points doubles.

A notre point de vue la question de déterminer les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre (de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta > 1$), peut être traitée de la façon suivante.

Il s'agit de déterminer les types projectivement distincts de surfaces du quatrième ordre, qui résultent d'une transformation birationnelle, en partant d'une surface donnée $\Phi_{4\delta}$.

Or le système linéaire transformant pourra être découpé sur $\Phi_{4\delta}$ par des variétés d'un certain ordre y, se comportant dans les 16 points doubles de la surface comme si ceux-ci étaient des points multiples d'ordre $x_i (i = 1, \ldots 16)$. La dimension d'un tel système est

$$2\delta y^2 + 1 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2,$$

et son degré est

$$4\delta y^2 - 2\sum x_i^2;$$

en égalant ce degré à 4, ou la dimension à 3, on tombe sur l'équation arithmétique

$$2\delta y^2 - \sum x_i^2 = 2.$$

On peut avoir aussi d'autres surfaces du quatrième ordre transformées de $\Phi_{4\delta}$, qui ne sont pas obtenues par un système transformant multiple du système des sections hyperplanes de $\Phi_{4\delta}$, tel que le système que nous venons de considérer.

En tous cas, en rappelant le théorème du n. 27 concernant les surfaces de Picard, il est aisé de reconnaître que, si les modules sont arbitraires, le système découpé sur la surface du quatrième ordre par les quadriques, sera représenté sur $\Phi_{4\delta}$ par un système découpé par des variétés ayant dans les points doubles une certaine multiplicité, et n'ayant d'ailleurs des courbes-base.

Ainsi donc on tombe sur la discussion arithmétique de l'équation

$$2\delta y^2 - \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 8.$$

[1] Comptes rendus: 1904, I p. 339, II p. 718: 1905, I p. 218, 931. Annales de l'Ecole normale 1907, pg. 77.

[2] Comptes rendus: 1906, I p. 768, II p. 767. Bulletin de la Soc. Math. de France: 1907, p. 53.

La question de déterminer toutes les surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre de diviseur $\delta > 1$, *dans le cas de modules arbitraires, se ramène à la discussion de cette équation de Pell généralisée. Il faut néanmoins tenir compte de certaines inégalités* qui expriment l'irréductibilité du système transformant considéré, et qui, dans un cas particulier, ont été étudiées de près par M. Remy.

53. *Quelques remarques au sujet du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique.* Soit une famille de surfaces algébriques dépendant de trois modules; si ces surfaces sont hyperelliptiques de rang $r > 1$, elles seront des surfaces régulières de rang $r = 2$, birationnellement identiques à des surfaces de Kummer généralisées, c'est-à-dire, à des $\Phi_{4\delta}$ pour une valeur convenable de δ.

Ainsi donc *la question de reconnaître si une surface donnée* (*dépendant de trois modules*) *est hyperelliptique de rang* $r > 1$, *se ramène à celle de reconnaître l'identité birationnelle de notre surface avec un type de surfaces, qui vient caractérisé à un point de vue invariant par l'existence d'un certain groupe de courbes* (le groupe qui correspond à celui des points doubles et des courbes de contact des hyperplans singuliers de $\Phi_{4\delta}$).

Partant, après avoir reconnu que les genres de la surface donnée sont tous égaux à 1 ($p_a = p_g = P_2 = 1$), il s'agira d'exprimer que la surface renferme un certain groupe de courbes rationnelles (de degré -2).

Or d'après un théorème de M. Severi, qu'il a récemment complété, toutes les courbes appartenant à une surface régulière, peuvent être obtenues par addition et soustraction en partant d'un nombre fini de systèmes linéaires. Par ce procédé *la question posée se ramène à la discussion arithmétique d'un système d'équations quadratiques.*

Ces remarques suffisent à montrer quel est en général le caractère du problème qui a pour objet de reconnaître si une surface donnée est hyperelliptique de rang $r > 1$. On serait amené toujours à des discussions analogues, dans le cas de surfaces régulières correspondant à des Θ dont les modules satisfont à des relations particulières.

Lorsqu'il s'agit de surfaces irrégulières, la question devient beaucoup plus simple et, comme nous aurons lieu de le montrer, on arrive à définir les surfaces hyperelliptiques irregulières par les valeurs de certains caractères invariants.

VI. Surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang $r > 1$.

54. D'après les nn. 31, 36 toute surface hyperelliptique irrégulière de rang $r > 1$, est une surface elliptique de genres

$$p_g = 0, \quad p_a = -1$$

renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

Le théorème fondamental que nous avons établi au n. 44, permet de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, et cette analyse, en laquelle nous avons été précedés par MM. Bagnera et de Franchis, amène à trouver toutes les surfaces elliptiques renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.

De notre côté, et d'une façon indépendante de ces recherches, nous avons établi la classification des surfaces hyperelliptiques irrégulières en tâchant de démontrer directement la réciproque de la proposition du n. 36; il s'ensuit que les surfaces hyperelliptiques irrégulières correspondent aux valeurs

$$r = 2,\ 3,\ 4,\ 6$$

du rang r, et qu'elles peuvent être définies d'après les valeurs de leurs plurigenres.

On a ainsi le théorème fondamental suivant.

Toute surface de genre arithmétique $p_a = -1$ et dont le genre et les plurigenres géométriques ont les valeurs 0, 1, est une surface hyperelliptique. Le tableau des familles différentes correspondantes à ces hypothèses, se trouvera indiqué en détail au n. 57.

55. *Rappel de quelques notions concernant les surfaces elliptiques.* Il faut rappeler d'abord quelques propriétés des surfaces elliptiques de genre $p_g = 0$.[1]

Il y a sur toute surface de cette famille un faisceau elliptique de courbes C de genre $\pi > 0$, et un faisceau rationnel de courbes elliptiques K; une courbe C et une courbe K se coupent en un certain nombre n de points, et ce nombre vient appelé le *déterminant* de la surface. Nous considérerons en particulier le cas $\pi = 1$, qui nous interesse ici.

Toute surface elliptique de genre $p_g = 0$ et de déterminant n, peut être représentée sur un cylindre elliptique, multiple suivant le nombre n,

$$\varphi(x, y) = 0;$$

[1] Cfr. Enriques, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, 1905.

il y aura sur φ une courbe de diramation formée par les courbes

$$z = a_1, \; z = a_2, \ldots \; z = a_t,$$

à compter respectivement suivant les ordres

$$s_1, \; s_2, \ldots \; s_t.$$

Si la surface elliptique doit renfermer un faisceau elliptique de courbes C de genre 1, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=t} \frac{s_i - 1}{s_i} = 2,$$

et par suite l'on tombera nécessairement sur un des cas suivants:

a) $$t = 4, \; s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2, \; n = 2\delta$$

(δ étant un entier *à priori* quelconque).

La surface ainsi définie dépend de *deux modules* c'est-à-dire du module de φ et du rapport anharmonique $(a_1 a_2 a_3 a_4)$. Les valeurs de ses genres et de ses plurigenres sont données par la formule de Enriques (l. c. § 8):

$$P_m = 1 + m(t - 2) - \sum_{i=1}^{t} \varrho_i,$$

où ϱ_i est un entier satisfaisant aux conditions

$$\frac{m}{s_i} \leq \varrho_i < \frac{m}{s_i} + 1$$

et où l'on prend $P_m = 0$ lorsque le second membre de la formule résulte négatif. On obtient ainsi

$$p_a = -1, \; P_{2i+1} = 0, \; P_{2i} = 1.$$

Réciproquement ces valeurs suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même de savoir que

$$p_a = -1, \; p_g = 0, \; P_2 = P_4 = 1.$$

En effet étant $p_a = -1$, $p_g = 0$, on a une surface elliptique dont les plurigenres peuvent être calculés d'après la formule citée d'Enriques. Or si $P_2 = t - 3 = 1$, il suit $t = 4$; et si $P_4 = 1$, étant $s_i \geq 2$, il suit

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2.$$

b) $$t = 3, \; s_1 = s_2 = s_3 = 3, \; n = 3\delta.$$

La surface ainsi définie dépend d'un module, c'est-à-dire du module de q (les courbes C sont en ce cas équianharmoniques).

On a

$$p_a = -1, \; P_{3i+1} = P_{3i+2} = 0, \; P_{3i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1, \; P_3 = 1, \; P_8 = 0,$$

car d'après la formule habituelle on en déduit $t = s_1 = s_2 = s_3 = 3$.

c) $$t = 3, \; s_1 = 2, \; s_2 = s_3 = 4, \; n = 4\delta.$$

La surface ainsi définie — renfermant un faisceau de courbes harmoniques C — dépend d'un module. On a

$$p_a = -1, \; P_{4i+1} = P_{4i+2} = P_{4i+3} = 0, \; P_{4i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants suffisent à caracteriser les surfaces elliptiques dont il est question. Il suffit même que l'on ait

$$p_a = -1, \; P_6 = P_{10} = 0, \; P_4 = 1.$$

d) $$t = 3, \; s_1 = 2, \; s_2 = 3, \; s_3 = 6, \; n = 6\delta.$$

La surface ainsi définie — renfermant comme dans le cas b) un faisceau de courbes équianharmoniques — dépend aussi d'un module. On a

$$p_a = -1, \; P_{6i+1} = P_{6i+2} = \cdots = P_{6i+5} = 0, \; P_{6i} = 1.$$

Ces valeurs des invariants caracterisent les surfaces elliptiques dont il s'agit. Il suffit même que l'on ait:

$$p_a = -1, \; P_2 = P_3 = P_{14} = 0, \; P_6 = 1.$$

Dans ce cas la discussion relative est peut-être moins simple et par suite nous l'exposons ici brièvement.

Étant $P_2 = 0$ et par suite $p_g = 0$, il s'agit d'une surface elliptique. La relation $P_2 = 0$ amène $t = 3$, tandis que la relation $P_6 = 1$ donne

$$\alpha) \qquad s_i \geq 3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ou

$$\beta) \qquad s_1 = 2, \; s_2 = 3, \; s_3 = 6.$$

Ceci posé, remarquons que $P_4 = 0$, car s'il était $P_4 > 0$, étant $P_6 = 1$, on aurait $P_2 = 1$. La relation $P_4 = 0$ jointe aux α) β), donne respectivement.

$$\alpha')\quad s_1 = s_2 = s_3 = 3, \text{ ou } \alpha'')\quad s_1 = s_2 = 3, \ s_3 \geq 4,$$
$$\beta')\quad s_1 = 2, \ s_2 = 3, \ s_3 \geq 6.$$

Comme les valeurs α') α'') donnent $P_3 = 1$, la relation $P_3 = 0$ rend possible seulement l'hypothèse β'). Enfin la relation $P_{14} = 0$ nous montre qu'il doit être $s_3 = 6$.

56. *Construction d'une surface de Picard représentée sur une surface elliptique multiple renfermant deux faisceaux de courbes elliptiques.* Soit $\Phi(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface elliptique d'ordre m — douée de singularités ordinaires — appartenant à un des types a) b) c) d) envisagés au n. préc., et soit $X(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface r-adjointe d'ordre $r(m-4)$ attachée à Φ, où $r (= 2, 3, 4, 6)$ est l'indice du premier plurigenre différent de zéro.

Envisageons la surface F représentée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z) = 0, \\ u^r = X(x, y, z), \end{cases}$$

x, y, z, u étant les coordonnées d'un point d'un espace à quatre dimensions. Nous prouverons que les courbes coupées sur F par les hyperplans parallèles à la droite u, sont des courbes *irréductibles* se coupant deux à deux suivant des groupes *canoniques.*

Ce résultat étant établi, on aura à considérer une correspondance $(1, r)$ entre les surfaces irréductibles Φ, F; dans cette correspondance il n'y a pas de points de coïncidence, car la $X = 0$ ne coupe la $\Phi = 0$ hors de la ligne double de Φ, et par suite sur la surface le radical $\sqrt[r]{X(x, y, z)}$ ne présente aucun point de *diramation effective.* D'après une formule de M. Severi[1] on pourra pourtant calculer le genre numérique p_a de F; on trouve ainsi $p_a = -1$. Comme la F vient renfermer des courbes pluricanoniques d'ordre zéro — transformées des courbes pluricanoniques de Φ — elle sera ou bien une surface elliptique de genre $p_g = 0$, ou bien une surface ayant les genres $p_g = 1$, $p_a = -1$ et la courbe canonique d'ordre zéro. La première hypothèse s'écarte tout de suite en se rappelant que F renferme un système linéaire dont la série caractéristique est canonique; on en déduit que F est une surface hyperelliptique de rang 1, c'est-à-dire une surface de Picard (ou de Jacobi).

[1] Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2), t. 36, 1903.

D'après la définition du rang, r désignera le rang de la surface hyperelliptique Φ.

Il s'agit maintenant d'établir que les sections hyperplanes de F, sont irréductibles, et de déterminer leurs mutuelles intersections. Soit $z = z_0$ un hyperplan parallèle à la droite u et envisageons la courbe gauche Γ, qui est représentée par les équations:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z_0) = 0, \\ u^r = X(x, y, z_0). \end{cases}$$

Considérons le faisceau $|\Gamma|$ coupé sur le cylindre $\Phi(x, y, z_0) = 0$ par le faisceau de surfaces

$$u^r = \lambda X(x, y, z_0).$$

Pour $\lambda = 0$ on obtient la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$, que nous désignerons par C, à compter r fois, et les génératrices à l'infini du cylindre, formant un groupe que nous désignerons par I, dont chacune doit être comptée $r(m-5)$ fois. Pour $\lambda = \infty$ on obtient le groupe H formé par les couples de génératrices qui coïncident avec les génératrices doubles du cylindre, dont chacune doit être comptée r fois. On en tire que les courbes

$$(3) \qquad rC + r(m-5)I, \ rH$$

appartiennent totalement au faisceau $|\Gamma|$. Comme ces courbes n'ont pas des parties communes, si le faisceau $|\Gamma|$ est réductible, en vertu d'une proposition connue de MM. Noether et Enriques, toute courbe Γ sera composée par un certain nombre $h > 1$ de parties irréductibles $\varDelta$, formant une involution d'ordre h dans un faisceau $|\varDelta|$; celui-ci sera linéaire puisque sur le cylindre on n'a pas des faisceaux irrationnels différents du faisceau des génératrices. Les courbes (3) donneront des éléments multiples de cette involution. Il s'ensuit que r est égal à un multiple hl de h ($r = hl$, $r > l$), et que les courbes $lC + l(m-5)I$, lH sont des courbes $\varDelta$.

Pourtant les groupes coupés par ces courbes sur une section plane C_1 du cylindre seront équivalents. Or la courbe $lC + l(m-5)I$ coupe sur une C_1 un groupe équivalent à la section sur C_1 d'une courbe d'ordre $l(m-4)$, et la courbe lH rencontre C_1 suivant les $2d$ couples coïncidant dans les d points doubles de C_1, à compter chacune l fois. On en tire aisément que le multiple d'ordre l du groupe coupé par une droite sur une section plane de notre surface Φ, est équivalent à un groupe l-canonique.

Cette conclusion est absurde, car le plurigenre P_l de Φ résulterait > 0, tandis qu'on a supposé que P_r soit le premier plurigenre non nul. Partant $h = 1$ et les courbes (2) sont irréductibles.

Il nous reste à montrer que les plans parallèles à la droite u coupent sur la courbe Γ des groupes canoniques. La courbe Γ étant l'intersection complète d'une surface d'ordre m, $\Phi(x, y, z_0) = 0$, et d'une surface d'ordre $r(m-4)$, $u^r = X(x, y, z_0)$, on pourra couper sur Γ la série canonique au moyen des surfaces — adjointes à Γ — d'ordre $(r+1)(m-4)$ ayant la multiplicité $s_1 + s_2 - 2$ en tout point s_1-ple pour $\Phi = 0$ et s_2-ple pour $u^r = X$ (Noether).

Pour plus de clarté nous développerons le raisonnement dans le cas de $r = 2$.

Comme dans le sommet O_∞ du cylindre on a $s_1 = m$, $s_2 = 2m - 10$, les surfaces d'ordre $3(m-4)$ adjointes à Γ, auront en O_∞ un point multiple d'ordre $3(m-4)$ et par suite elles seront des cylindres ayant le sommet O_∞. A tout point double de la courbe $\Phi(x, y, z_0) = 0$ correspond un point P quadruple par rapport à Γ: deux branches de Γ étant tracées sur une nappe du cylindre et deux branches sur l'autre. On en tire que les cylindres adjoints à Γ doivent passer doublement par tout point P, c'est-à-dire qu'ils doivent être des cylindres biadjoints au cylindre Φ.

Il est maintenant nécessaire de bien fixer le comportement de ces cylindres en O_∞. La courbe Γ passe par ce point avec la multiplicité $2m(m-5)$ et y possède m tangentes distinctes, qui sont les génératrices à l'infini du cylindre Φ. On voit aisément qu'en correspondance de chacune de ces tangentes, Γ possède un point $2(m-5)$-ple et $m-5$ points doubles successifs, qui tombent en des points doubles de la surface $u^r = X$. On en tire que les cylindres adjoints à Γ passent simplement par chacun de ces points, c'est-à-dire qu'en correspondance de chacune des m tangentes ils ont avec Γ la multiplicité d'intersection $2(m-5)(3m-11)$.

Or les conditions définissant un cylindre adjoint à Γ, sont satisfaites en prenant le cylindre formé par $X = 0$, par le plan à l'infini compté $m-5$ fois et par un plan passant par O_∞; on en conclut que ce plan coupe sur Γ un groupe canonique.

Lorsque r prend une quelconque des valeurs restant (3, 4, 6) on voit analoguement qu'une surface d'ordre $(r+1)(m-4)$ adjointe à Γ, est formée par le cylindre $X = 0$, augmenté du plan à l'infini compté $m-5$ fois et d'un plan arbitraire passant par O_∞; et l'on arrive en conséquence à la même conclusion que ci-dessus.

En nous résumant et en rappelant que les surfaces hyperelliptiques de rang

1 sont caracterisées par les valeurs $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$ des invariants (n. 16), on peut énoncer le théorème suivant:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface irrégulière Φ soit hyperelliptique, peuvent être exprimées en disant que la surface a le genre numérique $p_a = -1$ et que ses plurigenres P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ prennent les valeurs 0, 1.

En désignant par r le rang de Φ, on a $r = 1, 2, 3, 4, 6$, et ces différents cas sont caractérisés par les valeurs suivantes des genres et des plurigenres:

$$p_a = -1 \begin{cases} r = 1, \; p_g = P_4 = 1 \\ r = 2, \; p_g = 0, \; P_2 = P_4 = 1 \\ r = 3, \; P_8 = 0, \; P_3 = 1 \\ r = 4, \; P_6 = P_{10} = 0, \; P_4 = 1 \\ r = 6, \; P_2 = P_3 = P_{14} = 0, \; P_6 = 1. \end{cases}$$ [1]

57. *Détermination de la valeur du diviseur δ appartenant aux surfaces hyperelliptiques irrégulières. — Types des substitutions linéaires sur u, v qui correspondent à ces surfaces.* — En nous appuyant sur le théorème établi au n. préc. nous pouvons déterminer aisément toutes les classes distinctes de surfaces hyperelliptiques irrégulières, ce qui revient à calculer les valeurs qu'on peut donner à leur diviseur δ. On retrouvera ainsi sous une autre forme, les résultats d'une classification établie directement par MM. Bagnera et de Franchis.[2]

Désignons par δ le diviseur de la surface hyperelliptique F de rang 1, représentée, d'après le n. préc. sur la surface r-ple Φ, de rang r. Aux deux faisceaux de courbes elliptiques de Φ, correspondent sur F deux faisceaux de courbes elliptiques, c'est-à-dire qu'il y a deux intégrales *elliptiques* u, v attachées à F.

Les groupes de r points de F correspondant aux points de Φ, ne peuvent pas être ramenés en eux-mêmes par une transformation de 2^me espèce de la surface, car autrement on pourrait construire une autre surface F' de rang 1 représentée sur la surface r'-ple Φ (r' étant un diviseur de r), et cela de façon qu'il n'y ait pas sur Φ des points de diramation, de sorte que le plurigenre $P_{r'}$ de Φ, aurait la valeur $P_{r'} = 1$, tandis que P_r est le premier plurigenre non nul.

On en tire que l'involution I_r image de Φ, est engendrée sur F par un groupe G_r de transformations birationnelles de F en elle-même (n. 44), et que le diviseur de Φ est égal au diviseur δ de F.

Les transformations de G_r seront représentées par des substitutions de la forme

[1] Nous avons déjà publié ce résultat dans les Atti della R. Acc. dei Lincei (séance du 5 janvier 1908).

[2] Atti della R. Acc. dei Lincei, 21 Avril 1907; n° 5.

$$(4) \qquad u' = u + k,\ v' = \mu v,\ (\mu = -1,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{-\frac{2\pi i}{3}},\ i),$$

$u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, étant les faisceaux elliptiques de F qui correspondent respectivement au faisceau elliptique et au faisceau rationnel de Φ. Il s'ensuit que G_r est un groupe cyclique (et l'on retrouve ainsi que $r = 2, 3, 4, 6$).

Quant à la constante k, elle devra être déterminée de façon que rk, et non $r'k$ $(r' < r)$, soit une période de l'intégrale elliptique u; autrement G_r renfermerait une transformation non identique

$$u' = u,\ \ v' = \mu v$$

et il y aurait la courbe de coïncidence $v(\mu - 1) = 0$, c'est-à-dire que I_r serait représentée par une réglée.

Ceci posé examinons les différents cas correspondants aux valeurs de r.

Premier cas: $r = 2$. Le groupe G_r est engendré par la substitution

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{2},\ \ v' = -v$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a par suite sur F la transformation birationnelle

$$T) \quad u' = u,\ \ v' = -v$$

qui possède une courbe de coïncidence $(v = 0)$. Pourtant sur toute courbe $u =$ const., la T donne une série linéaire g_2^1 douée de 4 coïncidences. Comme la courbe de coïncidence de la T est composée par un certain nombre y de courbes $v = \text{const.}$ — parmi lesquelles la $v = 0$ — en désignant par x le nombre des intersections de deux courbes $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$, nous aurons nécessairement

$$xy = 4$$

et par suite

$$x = 1,\ y = 4;\ \ x = 2,\ y = 2;\ \ x = 4,\ y = 1.$$

a) $x = 1$, $y = 4$. La surface F est alors la surface de Jacobi qui correspond à une courbe de genre deux décomposée en deux courbes elliptiques, et par conséquent on a le tableau des périodes

$$\begin{array}{ccccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & g'. \end{array}$$

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{2}, \quad v' = v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 2$, $\delta = 1$.

b) $x = y = 2$. On a sur F deux faisceaux dont les courbes se coupent en deux points. Démontrons que la F a le diviseur 2. Soit en effet

$$\begin{array}{c|cccc} u & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ v & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

le tableau des périodes normales des intégrales u, v, les indices 1, 3 et 2, 4 étant associés.

L'involution J_2 engendrée sur F en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux, sera représentée par une substitution de 2[me] espèce de la forme

$$u' = u + \frac{\omega_1}{2}, \quad v' = v + \frac{\theta_1}{2},$$

car le premier couple $(\omega_1 \theta_1)$ des périodes normales peut être choisi arbitrairement. Comme J_2 est identique à une surface de diviseur 1 — la surface des couples de points de deux courbes elliptiques — on pourra conclure que le tableau

$$\begin{array}{cccc} \frac{\omega_1}{2} & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \\ \frac{\theta_1}{2} & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array}$$

doit se rapporter à une surface de diviseur 1, et par suite que

$$\frac{\omega_1}{2}\theta_3 - \omega_3\frac{\theta_1}{2} + \omega_2\theta_4 - \omega_4\theta_2 = 0.$$

Cette relation montre que notre surface F a le diviseur $\delta = 2$.

De la forme des périodes de la surface de Jacobi représentant J_2, on tire que les périodes normales de u, v, sur la surface F, au moyen d'une substitution linéaire sur u, v, peuvent se réduire à la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g \end{array}$$

On voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = -v$$

engendre sur F une involution représentée par une surface elliptique Φ de rang $r = 2$ et de diviseur $\delta = 2$.

c) $x = 4$, $y = 1$. Sur la surface F qui se rapporte à ce cas, considérons l'involution J_4 qu'on obtient en coupant deux à deux les courbes des deux faisceaux $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$; cette involution peut aussi être engendrée par un groupe Γ_4 de transformations de 2^me^ espèce qui ramènent en elle-même la courbe de coïncidence de la transformation T et par suite la transformation T elle-même.

En multipliant T par les transformations de Γ_4 on engendre un groupe Γ_8 formé par des transformations permutables involutoires.

En substituant à T la transformation S, dépourvue de coïncidences, nous obtiendrons un groupe Δ_8 en isomorphisme oloédrique avec Γ_8. Sur la courbe $v = 0$ qui reste invariant vis-à-vis des transformations de Δ_8, ce groupe donne lieu à un groupe Δ'_8 engendrant une involution elliptique γ^1_8. Comme Δ'_8 est isomorphe à Δ_8, Δ'_8 renfermera 7 transformations involutoires de 2^me^ espèce sur $v = 0$, tandis que sur une courbe elliptique on ne trouve que 3 de telles transformations. — On en conclut que le cas c) est impossible.[1]

Deuxième cas: $r = 3$. Le groupe G_3 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\theta}{3}, \quad v' = \varepsilon v \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

θ étant une période de l'intégrale elliptique u. On a la transformation

$$T) \quad u' = u, \quad v' = \varepsilon v,$$

possédant une courbe de coïncidence, dont fait partie la $v = 0$. Sur toute courbe $u = \text{const.}$, T donne une série g^1_3, douée de 3 points triples. En désignant par y le nombre des courbes $v = \text{const.}$ qui forment la courbe de coïncidence de T, et par x le nombre des points communs à $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, on a par suite

[1] On peut construire aisément des surfaces pour lesquelles $x = 4$, $y = 1$ et qui renferment des groupes du type Γ_8; telle est p. ex. la surface de Jacobi correspondant au tableau $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Vmatrix}$. Mais sur cette surface on n'a pas des transformations involutoires sans coïncidences du type

$$u' = u + \text{const.}, \quad v' = -v.$$

$$xy = 3$$

d'où

$$x = 1,\ y = 3;\quad x = 3,\ y = 1.$$

d) $x = 1$, $y = 3$. Le faisceau $v = \text{const.}$ sera équianharmonique et l'on aura le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon. \end{array}$$

Effectivement dans ce cas la substitution

$$u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v$$

engendre sur F une involution I_3 identique à une surface elliptique pour laquelle $r = 3$, $\delta = 1$.

e) $x = 3$, $y = 1$. Comme dans le cas b), on voit que le tableau des périodes relatives à F, se réduit au diviseur 1 en ajoutant la troisième partie d'une période, et l'on en tire que F a le diviseur 3. On voit aussi comme en b) que le tableau correspondant à F peut être mis sous la forme

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\[2ex] v & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3}. \end{array}$$

et par suite que F possède la transformation

$$u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v.$$

qui engendre une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = \delta = 3$.

Troisième cas: $r = 4$. Le groupe G_4 est donné par

$$S) \quad u' = u + \frac{\omega}{4}, \quad v' = iv;$$

la transformation

$$T) \quad u' = u, \quad v' = iv$$

donne sur toute courbe $u = \text{const.}$ une g_4^1 douée de 2 points 4-ples et de 2 points doubles. Les deux points 4-ples peuvent varier en $y \geq 1$ courbes $v = \text{const.}$; on a la condition

$$xy = 2$$

et par suite

$$x = 1, \quad y = 2; \quad x = 2, \quad y = 1.$$

f) $x = 1$, $y = 2$. On a le tableau

$$\begin{array}{c|cccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & i. \end{array}$$

La substitution

$$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = i\,v$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 1$.

g) $x = 2$, $y = 1$. On tombe sur une surface du type b) correspondant au tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} u & \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ v & 0 & 1 & \frac{1}{2} & g'. \end{array}$$

Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être harmonique, on peut poser $g' = \frac{i+1}{2}$, et alors on voit que la substitution

$$u' = u + \frac{1}{8}, \quad v' = i\,v$$

donne sur F une involution représentée par une surface elliptique ayant $r = 4$, $\delta = 2$.

Qautrième cas: $r = 6$. En suivant la marche habituelle on trouve sur les courbes $u = \text{const.}$ une g_6^1 douée d'un point 6-ple, de deux points 3-ples et de trois points doubles. Le point 6-ple décrit la courbe $v = 0$, qui, par conséquent, vient couper toute courbe $u = \text{const.}$ en un seul point. Comme le faisceau $v = \text{const.}$ doit être équianharmonique, on aura le tableau

$$\begin{array}{ccccc} u & 1 & 0 & g & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{array}$$

et la substitution $u' = u + \frac{1}{6}$, $v' = -\varepsilon\,v$ engendrera sur F une involution représentée par une surface elliptique pour laquelle $r = 6$, $\delta = 1$.

En résumant, on peut former le tableau suivant qui donne *les valeurs du rang* r, *du diviseur* δ *et du déterminant* $n (= r\,\delta)$ *ainsi que les périodes et les substitutions linéaires sur* u, v, *qui correspondent aux surfaces hyperelliptiques irrégulières de rang* $r > 1$.

r	δ	n	Périodes	Substitutions sur u, v
2	1	2	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{2}, \quad v' = -v$
2	2	4	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = -v$
3	1	3	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v$
3	3	9	$\begin{cases} \frac{1}{3} & 0 & g & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1-\varepsilon}{3} \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{9}, \quad v' = \varepsilon v$
4	1	4	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{4}, \quad v' = i v$
4	2	8	$\begin{cases} \frac{1}{2} & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1+i}{2} \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{8}, \quad v' = i v$
6	1	6	$\begin{cases} 1 & 0 & g & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \end{cases}$	$u' = u + \frac{1}{6}, \quad v' = -\varepsilon v$

VII. Surfaces hyperelliptiques admettant une représentation paramétrique propre par des fonctions Θ irréductibles.

58. — *Quelques remarques au sujet des surfaces admettant une représentation paramétrique par des fonctions hyperelliptiques irréductibles.* — Nous avons reconnu d'abord que les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ se réduisent, pour des valeurs arbitraires des modules, aux surfaces régulières de rang 2 (surface de Kummer et ses généralisations pour $\delta > 1$).

Pour des valeurs particulières des modules, il se présente d'autres surfaces hyperelliptiques correspondant à des surfaces de Jacobi (ou de Picard) qui admettent des transformations birationnelles en elles-mêmes outre que les transformations ordinaires de 1[re] et de 2[me] espèce.

Le problème général de déterminer toutes les familles birationnellement distinctes de surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$, peut être traité en procédant de la façon suivante:

On déterminera d'abord toutes les surfaces de rang 1 admettant des transformations birationnelles en elles-mêmes; à tout groupe fini de transformations correspond une involution qui en est engendrée; celles parmi ces involutions qui ne sont pas rationnelles ou représentée par des réglées, nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dont le rang est égal à l'ordre du groupe.

Or il y a lieu à distinguer deux cas:

1) celui où il s'agit d'involutions appartenant à une surface de Jacobi associée à une courbe de genre 2 *irréductible;*

2) le cas où il s'agit d'involutions sur une surface de Jacobi associée à une courbe *réductible.*

Étant donnée une surface hyperelliptique de rang r, correspondante à une involution du type (1), on dira que la *représentation paramétrique* de la surface est obtenue *par des fonctions hyperelliptiques de rang r irréductibles.* En ce cas il est impossible de remplacer les fonctions hyperelliptiques de u, v, qui fournissent notre représentation, par des fonctions elliptiques $p_1(au+bv)$, $p_2(cu+dv)$, lorsque, bien entendu, on construit la surface de rang 1, F, correspondante à Φ, au moyen des *périodes primitives* des fonctions qui donnent la représentation de Φ (voir le n. 12).

Lorsqu'on envisage la périodicité par rapport à un tableau non primitif, la représentation de Φ peut devenir réductible. Il y a lieu d'éclaircir cette remarque par un exemple. Considérons les deux tableaux

$$\alpha)\ \begin{Bmatrix} 1 & 0 & g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & g' \end{Bmatrix} \qquad \beta)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2g & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2g' \end{vmatrix}.$$

D'après la remarque du n. 12, la surface de Jacobi F correspondant à α) représente une involution sur la surface de Jacobi F' correspondant à β); et tandis que F est associée à une courbe de genre 2 irréductible, F' est associée à une courbe réductible. Pourtant une surface hyperelliptique Φ qui admet une représentation irréductible (de rang r) par rapport à α), admet aussi une représentation réductible (de rang $4r$) par rapport à β).

Dans la suite nous nous rapporterons au cas (1), *en supposant aussi pour simplicité,* $\delta = 1$.

En se rappelant le résultat établi tout à l'heure pour les surfaces hyperelliptique irrégulières, on voit que les types ayant $\delta = 1$ amènent à des représentations réductibles.

Suivant notre programme il s'agira de classifier les surfaces de JACOBI (associées à des courbes irréductibles) qui admettent des transformations non ordinaires en elles-mêmes. Et on pourra laisser de côté les transformations cycliques de la forme:

$$u' = u + k, \quad v' = \mu v,$$

parce que celles-ci amènent à des surfaces hyperelliptiques irrégulières où à des involutions sur de telles surfaces, et, lorsque $\delta = 1$, elles correspondent à des cas de réductibilité de la représentation paramétrique.

En d'autres termes *nous aurons à étudier les groupes appartenant à une surface de Jacobi attachée à une courbe de genre 2 irréductible et ne renfermant pas des transformations sans points unis.*[1]

Remarque. — Les involutions régulières engendrées sur une surface de rang 1 par des groupes renfermant des transformations singulières sans points unis, restent partant exclues de notre étude. Elles amènent à des surfaces régulières de genre $p_g = 0$ et de bigenre $P_2 = 1$, qui ont été objet des recherches de MM. BAGNERA et DE FRANCHIS.[2]

59. *Transformations d'une surface de Jacobi en elle-même: transformations de* HERMITE *et de* M. HUMBERT. — Soit F une surface de JACOBI correspondante au tableau de périodes normales

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$$

L'analyse des cas où il y a des transformations birationnelles non ordinaires de F en elle-même, nous ramène à considérer les relations fondamentales (A), (B), (C), (D), du n. 45, savoir

$$\text{(A)} \quad g^2 a_3 + g h (a_2 + b_3) + h^2 b_2 + g (a_0 - d_3) + h (b_0 - d_2) - d_0 = 0$$

$$\text{(B)} \quad g h a_3 + g g' a_2 + h^2 b_3 + h g' b_2 + g a_1 + h (b_1 - d_3) - g' d_2 - d_1 = 0$$

$$\text{(C)} \quad g h a_3 + g g' b_3 + h^2 a_2 + h g' b_2 - g c_3 + h (a_0 - c_2) + g' b_0 - c_0 = 0$$

$$\text{(D)} \quad h^2 a_3 + h g' (a_2 + b_3) + g'^2 b_2 + h (a_1 - c_3) + g' (b_1 - c_2) - c_1 = 0.$$

[1] Que »toute transformation cyclique sans points unis se ramène à la forme $u' = u + k$, $v' = \mu v$» c'est une conséquence immédiate du théorème de M. HAMBURGER sur les substitutions linéaires homogènes; il suffit de se rapporter au cas où l'équation caractéristique a la racine 1.

[2] Rendiconti dei Lincei, 21 avril 1907, nº 6; Comptes rendus, 4 novembre 1907.

Nous avons dit que ces relations se réduisent à des identités pour des valeurs arbitraires de g, h, g', et on tombe alors sur les transformations ordinaires de F.

Si les relations (A), (B), (C), (D) ne sont pas des identités, on dira que les périodes g, h, g' sont liées par des *relations entières*, qui doivent se réduire au plus à *trois* distinctes.

Une relation entière peut se présenter quelque fois sous la forme particulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

On démontre que si les (A), (B), (C), (D) ne sont pas identiques, les périodes sont liées au moins par une telle relation singulière.[1]

Au moyen des 16 entiers caractéristiques, M. Humbert a composé deux autres entiers l, k, qu'il a appelés les *indices* de la transformation, et qui jouent un rôle fondamental dans la théorie. Rappelons ici la définition de ces nombres.

Des relations (A), (B), (C), (D) on tire aisément la relation

$$[(ac)_{03} + (ac)_{12}]g + [(bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12}]h + [(db)_{03} + (db)_{12}]g' +$$
$$+ [(ab)_{03} + (ab)_{12}](h^2 - gg') + [(cd)_{03} + (cd)_{12}] = 0,$$

où l'on a posé

$$(ac)_{03} = a_0 c_3 - a_3 c_0, \quad (ac)_{12} = a_1 c_2 - a_2 c_1, \text{ etc.}$$

Eh bien, si les coefficients (entiers) de cette relation ont un facteur commun — se réduisant à zéro lorsque la relation devient identique — ce facteur s'appelle *l'indice* k de la transformation.

Après avoir divisé par ce facteur (s'il est différent de zéro), la relation se présente sous la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

A, B, C, D, E étant des entiers premiers entre eux.

Le second indice l est défini par

$$l = (ad)_{03} + (ad)_{12}$$

et entre les deux indices de la transformation birationnelle, on a la relation

$$1 = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

En particulier, lorsque $k = 0$, on tombe sur les *transformations de Hermite* (d'ordre 1), caractérisées par les relations

[1] Humbert, Journal de Math., 1900, p. 330.

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (ac)_{03}+(ac)_{12}=(bd)_{03}+(bd)_{12}+(ab)_{03}+(ab)_{12}=(cd)_{03}+(cd)_{12}=0 \\ (bc)_{03}+(bc)_{12}=(ad)_{03}+(ad)_{12}=1. \end{cases}$$

La classe des transformations de HERMITE comprend les transformations ordinaires de 1re et de 2de espèce: mais pour des valeurs particulières des modules on a aussi des *transformations singulières de Hermite.*

Les transformations correspondantes à $k \neq 0$ sont toujours singulières et nous les appelerons *transformations de Humbert.*[1]

60. Revenons au cas général d'une transformation d'indices l, k arbitraires. Nous allons former une combinaison de l, k ayant une signification géométrique remarquable.

Le système Σ représenté par

$$\Theta(u+\varrho,\ v+\sigma)=0,$$

où Θ est une fonction thêta de 1r ordre et ϱ, σ sont des paramètres (n. 28), est changé par la transformation birationnelle envisagée, en un système Σ analogue, de degré 2 et de genre 2. L'équation des courbes de ce dernier système s'obtiendra en transformant la fonction Θ au moyen de la substitution linéaire

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta, \end{aligned}$$

qui répresente notre correspondance birationnelle. On obtient ainsi l'équation

$$\varphi(u+\varrho,\ v+\sigma)=0,$$

où φ est une fonction intermédiaire d'indices l, k (n. 28).[2]

En appliquant une formule donnée par M. HUMBERT (J. d. M., 1900, p. 313) on trouve que les fonctions Θ, φ ont $2l+Bk$ zéros communs, et par suite on peut énoncer la proposition suivante:

Une transformation birationnelle d'indices l, k, attachée à la relation singulière

$$Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0,$$

change le système Σ formé par les courbes de niveau zéro des fonctions Θ du 1r ordre, en un système analogue formé par les courbes de niveau zéro des fonctions intermé-

[1] M. HUMBERT réserve seulement à ces transformations la dénomination de »singulières».
[2] HUMBERT, J. de M., 1900, p. 311.

diaires d'indices l, k; et ces dernières courbes coupent une des premières en $2l+Bk$ points.

En particulier si $k=0$, et par suite $l=1$, les courbes transformées coupent les courbes primitives en 2 points. Il s'ensuit qu'elles appartiennent au système Σ donné (n. 24).

On arrive à la même conclusion en se rappelant que *les transformations de Hermite sont caractérisées par la condition de changer une fonction thêta en une fonction analogue.*

61. — *Sur la représentation paramétrique d'une surface hyperelliptique par des fonctions Θ.* — Envisageons sur la surface de Jacobi F une involution (régulière) I_r engendrée par les transformations birationnelles d'un groupe G_r, et soit Φ une surface hyperelliptique image de I_r.

Supposons d'abord que les r transformations de G_r soient des transformations de Hermite, ou brièvement que G_r soit un *groupe de Hermite.*

Alors, en tenant compte du fait que les transformations de G_r changent en lui-même un système Σ fixé, on construit aisément un système linéaire irréductible $|D|$, appartenant totalement au multiple d'ordre l de Σ, de telle façon que toute courbe D soit changée en elle-même par G_r, c'est-à-dire que $|D|$ appartient à l'involution I_r. Si, comme on peut le supposer sans restriction, le système linéaire $|\Gamma|$ de Φ correspondant à $|D|$, est *simple*, on peut transformer birationnellement la surface Φ, de telle sorte que $|\Gamma|$ résulte le système des sections planes (ou hyperplanes) de la surface transformée, que nous désignerons encore par Φ.

Comme par un choix convenable des intégrales u, v, les courbes du système Σ viennent être représentées en égalant à zéro les fonctions Θ du 1^r ordre, le système $|D|$ viendra représenté par une équation de la forme

$$\lambda_0\Theta_0(u,v)+\lambda_1\Theta_1(u,v)+\cdots+\lambda_d\Theta_d(u,v)=0, \tag{2}$$

les Θ_i étant des fonctions thêta d'ordre l.

En désignant par $(x_0, x_1, \ldots . x_d)$ les coordonnées homogènes d'un point variable sur Φ, on pourra donc poser

$$\varrho x_i=\Theta_i(u,v) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots d). \tag{3}$$

Pour des valeurs données des variables x les équations précédentes admettront seulement un nombre *fini* de solutions incongrues (u,v), car deux courbes D arbitraires se coupent en un nombre fini de points.

On remarquera que quelqu'une des solutions susdites pourra ne varier pas avec les x, lorsque le système $|D|$ ait des points-base.

Faisons maintenant le raisonnement réciproque. Soit Φ une surface hyperelliptique de rang r représentée par les formules (3), les Θ_i étant des fonctions d'ordre l telles que les équations (3) aient un nombre fini de solutions pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point de Φ. Au système linéaire $|\Gamma|$ coupé sur Φ par les plans (ou hyperplans), répond sur F le système linéaire $|D|$, représenté par (2). Comme le système $|D|$ appartient à l'involution I_r dont les groupes répondent aux points de Φ, toute courbe D sera changée en elle-même par les transformations du groupe G_r engendrant I_r. Il s'ensuit qu'une, T, de ces transformations change une courbe C de Σ en une courbe C_0 telle que les courbes lC, lC_0 appartiennent au même système continu. On en tire que C_0 coupe en deux points C et par suite (n. 24) que T change en lui-même le système Σ. On arrive pourtant à la conclusion que G_r est un groupe de Hermite. Donc:

Toute surface hyperelliptique de rang r, répondant à une involution engendrée par un groupe de Hermite G_r, se laisse représenter au moyen des fonctions Θ, par des formules du type

$$\varrho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots);$$

ces équations admettant seulement un nombre fini de solutions incongrues (u, v), pour des valeurs arbitraires des coordonnées x d'un point variable sur la surface. — Réciproquement, toute surface hyperelliptique admettant une telle représentation, répond à un groupe de Hermite.

Nous exprimerons brièvement ces propriétés en disant que *les surfaces répondant à des groupes de Hermite sont caractérisées par la condition d'admettre une* **représentation propre** *par des fonctions thêta.*

Si, au contraire, la surface Φ répond à un groupe G_r de Humbert (formé par des transformations de Humbert), aux sections planes de Φ répondront sur F des courbes D n'appartenant pas totalement à un système $l\Sigma$; mais on pourra toujours ajouter aux courbes du système linéaire $|D|$ une courbe fixe H, de telle sorte que les courbes $H + D$ appartiennent totalement à un système $l\Sigma$. Le système réductible $H + |D|$ sera représenté par une équation du type (2) et par suite la Φ admettra une représentation du type (3); mais *dans le cas actuel les équations* (3) *posséderont un nombre infini de solutions fixes, répondant aux points de la courbe fixe H, et un nombre fini de solutions variables avec les x.*

On dira par conséquent que *toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une* **représentation impropre** *par des fonctions Θ.*

Comme toute courbe tracée sur F peut être représentée d'une façon complète en égalant à zéro une fonction intermédiaire, dans le cas actuel le système $|D|$ pourra toujours être représenté par une équation du type

$$\lambda_0 \varphi_0(u,v) + \lambda_1 \varphi_1(u,v) + \cdots + \lambda_d \varphi_d(u,v) = 0,$$

les φ étant des fonctions intermédiaires n'ayant deux à deux qu'un nombre fini de zéros communs. Donc:

Toute surface hyperelliptique répondant à un groupe de Humbert admet une représentation propre par des fonctions intermédiaires.

62. — *Quelques propriétés des transformations d'une surface de Jacobi en elle-même.* — Considérons une surface de Jacobi admettant une transformation birationnelle en elle-même

$$(T) \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + \mu v + \alpha \\ v' = \lambda' u + \mu' v + \beta. \end{cases}$$

En multipliant cette transformation T par les transformations de 2^{de} espèce, on obtient la série continue ∞^2 de transformations analogues

$$(1) \qquad \begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + h \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + k \end{aligned}$$

(où h, k sont des paramètres).

En transformant T par la transformation de 2^{de} espèce

$$(S) \qquad \begin{cases} u' = u + \gamma \\ v' = v + \delta \end{cases}$$

on obtient la transformation $S^{-1} T S$

$$\begin{aligned} u' &= \lambda u + \mu v + \alpha - (\lambda - 1)\gamma - \mu \delta \\ v' &= \lambda' u + \mu' v + \beta - \lambda' \gamma - (\mu' - 1)\delta, \end{aligned}$$

transformation qui appartient à la même série ∞^2 (1) et peut être identifiée avec une transformation arbitraire de cette série, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \mu \\ \lambda' & \mu' - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Cette condition analytique se traduit en ce qu'il y a un nombre fini > 0 de solutions des congruences:

$$(\lambda - 1)\,u + \mu v = -\alpha$$
$$\lambda' u + (\mu' - 1)\,v = -\beta,$$

c'est-à-dire que T possède un nombre fini > 0 de points unis.

Ainsi donc:

Toute transformation T de F, ayant un nombre fini de points unis, vient transformée par les transformations de 2^{de} espèce en des transformations semblables formant une série ∞^2; cette même série peut être obtenue en multipliant T par les transformations de 2^{de} espèce.

Remarque. — Dans la série ∞^2 considérée, il y aura une transformation, semblable à T, qui aura le point uni $u = v = 0$, de sorte que la substitution sur u, v se réduit homogène.

Si T est une transformation périodique d'ordre n, toutes les transformations semblables auront la même période; parmi celles-ci il y en a une qui laisse invariant le point $u = v = 0$, et qui peut se réduire à la forme suivante

$$u' = \varepsilon^r u, \qquad v' = \varepsilon^s v \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$$

(u, v étant des intégrales convenables non normales).

Une autre remarque qui se rattache à ce qui précède est la suivante.

Etant donnée sur F une transformation birationnelle T possédant des points unis, il y aura des transformations ordinaires qui ramènent T en elle-même; ce seront les transformations de 1^{re} et de 2^{de} espèce qui font correspondre à un point uni de T un point uni de la même transformation.

Cette propriété peut être reconnue aisément au point de vue géométrique. Soient A, B deux points unis distincts ou coïncidants de T, et soit S la transformation de 1^{re} ou de 2^{de} espèce portant A en B. La transformée de S par T sera une transformation de la même espèce que S, faisant correspondre B à A, et par suite ne différera pas de S; il s'ensuit que S, T sont échangeables, et par conséquent que S transforme T en elle-même.

63. — *Transformations hermitiennes.* — Les propriétés que nous venons d'étudier se rapportent de même aux différentes sortes de transformations singulières qui peuvent appartenir à une surface de Jacobi. Tâchons maintenant de caractériser au point de vue géométrique les transformations hermitiennes.

Soit T une telle transformation de la surface F. Après avoir multipliée T par une transformation de 2^{de} espèce convenable, on peut supposer toujours qu'elle possède un point uni P. Fixons un système Σ de courbes C appartenant à F et envisageons la variété H formée par les ∞^1 courbes C issues par P.

Comme T transforme en lui-même le système Σ, on aura entre les éléments (courbes) de la variété H une transformation birationnelle, et par suite l'on aura une transformation analogue entre les points de la courbe de genre deux attachée a F (n. 22). Ainsi donc:

Toute transformation hermitienne d'une surface de Jacobi correspond à une transformation birationnelle de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Réciproquement à toute transformation de cette courbe correspond une série, en général ∞^2, de transformations hermitiennes de la surface de Jacobi.

64. — *Aperçu sur les surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta > 1$.* En ce qui précède nous nous sommes rapportés aux surfaces hyperelliptiques de diviseur $\delta = 1$ et par suite à la surface de Jacobi.

Il y a lieu d'étendre les considérations établies, aux surfaces de diviseur $\delta > 1$.

Etant donné sur F une transformation birationnelle

$$u' = \lambda u + \mu v + \alpha$$
$$v' = \lambda' u + \mu' v + \beta$$

on exprime tout d'abord $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ au moyen des périodes par des relations qu'on obtient des relations (1) du n. 45 en changeant a_1, b_1, c_1, d_1 respectivement en

$$\frac{a_1}{\delta}, \quad \frac{b_1}{\delta}, \quad \frac{c_1}{\delta}, \quad \frac{d_1}{\delta}.$$

On arrivera ainsi aux relations entières analogues aux relations (A), (B), (C), (D).

Les transformations birationnelles existant sur F se partageront en deux familles: *transformations de Hermite,* qui changent entre elles les fonctions Θ_δ (n. 29) et *transformations de Humbert* qui changent une fonction Θ_δ en une fonction intermédiaire φ_δ.

Les considérations relatives à la représentation d'une surface hyperelliptique de rang r au moyen des fonctions thêta ou intermédiaires, s'étendent sans aucune difficulté aux surfaces de rang r et diviseur $\delta > 1$. On a une représentation *propre* par des fonctions Θ_δ seulement pour les surfaces répondant à des groupes de Hermite; tandis que pour les surfaces répondant aux groupes de Humbert, on a une représentation propre par des fonctions φ_δ.

Ceci posé, on peut reconnaître que toute surface hyperelliptique admettant une représentation propre par des fonctions Θ_δ irréductibles correspond à une courbe de genre 2 possédant des transformations en elle-même.

En somme la détermination de ces surfaces hyperelliptiques, se ramène à celle des involutions I_δ appartenant à une surface de JACOBI et invariant par rapport à un groupe de transformations de celle-ci.

Le rang étant >2 on trouverait que δ ne peut recevoir qu'un nombre fini de valeurs.

Mais nous laisserons de côté cette discussion pour nous borner au cas $\delta = 1$; la remarque qui précède montre d'ailleurs comment cette analyse serait à compléter, et que les types qui se présentent pour $\delta > 1$ se rattachent étroitement à ceux que nous nous proposons de classifier, où $\delta = 1$.

65. — *La classification des surfaces hyperelliptiques admettant une représentation propre par des Θ irréductibles, ramenée à l'analyse des courbes de genre 2 qui possèdent un groupe de transformations en elles-mêmes.* — Nous nous proposons de classifier les surfaces hyperelliptiques (régulières) de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles.

En laissant de côté le cas $r = 2$ (ch. V), ces surfaces correspondent à des surfaces de JACOBI singulières admettant un groupe G_r de transformations en elles-mêmes, transformations possédant chacune un nombre fini de points unis, et correspondantes à des transformations analogues de la courbe de genre 2 associée à la surface.

Il s'agit donc de classifier les groupes G_r satisfaisant aux conditions établies.

Remarquons d'abord que parmi les transformations de G_r il peut y avoir une seule transformation ordinaire (de première espèce), parce que le produit de deux transformations de 1^re^ espèce donnerait une transformation de 2^de^ espèce, et le groupe G_r n'en renferme pas (étant $\delta = 1$).

Il s'ensuit que si le groupe G_r renferme des transformations à période pair $2p$, $2q$, ..., les puissances d'ordre p, q, ... de celles-ci, donneront lieu à une même transformation de 1^re^ espèce. En effet chacune de ces puissances est une transformation périodique d'ordre 2 douée de points unis en nombre fini, et par conséquent elle est une transformation ordinaire de 1^re^ espèce.

On voit aussi que si G_r renferme une transformation de 1^re^ espèce π, celle-ci est échangeable avec les autres transformations du groupe, car les transformées de π en G sont des transformations périodiques d'ordre 2.

Enfin si à côté de π il y a en G_r une transformation T à période impair p, la transformation $T\pi$ sera à période $2p$, et sa puissance d'ordre p sera π.

Ces remarques faites, considérons la courbe f de genre 2, qui est associée à F.

Nous allons démontrer que f admet un groupe de transformations isomorphe à G_r.

Il faut distinguer deux cas:

a) Il peut arriver que les transformations de G_r aient sur F un même point uni O.

En ce cas considérons parmi les courbes de genre 2 d'un système Σ appartenant à F, celles qui passent par O. On aura une série ∞^1 de courbes qui correspondent élément par élément à f; et cette série sera invariant par rapport à G_r. Il s'ensuit que le groupe G_r de F correspond à un groupe isomorphe engendré sur f par les transformations homologues à celles de G_r.

b) Supposons au contraire que les transformations de G_r n'aient pas sur F un point uni commun.

Toute transformation de G_r appartient à une série ∞^2 de transformations périodiques du même ordre, que l'on obtient en multipliant la transformation donnée par les ∞^2 transformations de 2[de] espèce.

Dans la série ∞^2 des transformations périodiques nommées dessus, il y en a une admettant un point uni O arbitrairement choisi sur F. De cette façon aux r transformations de G_r on peut faire correspondre r transformations périodiques du même ordre, admettant un même point uni O. Ces transformations engendreront un groupe G'_r isomorphe à G_r.

C'est là une conséquence du fait que deux transformations quelconques de G_r ne donnent jamais pour produit une transformation de 2[de] espèce.

Partant on en déduit le résultat suivant:

Toute surface hyperelliptique (régulière) de rang $r > 1$ et de diviseur 1, admettant une représentation propre par des $\Theta(u, v)$ irréductibles, correspond à une courbe de genre 2 possédant un groupe de r transformations en elle-même, et ce groupe est isomorphe à celui formé par les substitutions linéaires sur u, v, qui laissent invariant les Θ.

Réciproquement, si l'on se donne une courbe de genre 2 admettant un groupe G'_r de transformations en elle-même, la surface de Jacobi correspondante admettra un ou plusieurs groupes G_r isomorphes à G'_r; chacun de ceux-ci donne lieu à une involution, et, en écartant les cas où l'on tombe sur des involutions rationnelles ou représentées par des réglées, on aura autant de types de surfaces hyperelliptiques satisfaisant aux conditions demandées.

66. *Courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes.* D'après le n. 65 nous sommes ramenés à l'analyse des courbes de genre 2 admettant des transformations birationnelles singulières en elles-mêmes.

Cette analyse a été l'objet d'une étude de M. Bolza,[1] dont il nous conviendra de rappeler les résultats.

[1] »On binary sextics with linear transformations into themselves» (American Journal of Math. t. X, 1888).

Soit une courbe de genre 2

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0;$$

φ est un polynome d'ordre 5 ou 6, qui peut être remplacé par une forme homogène d'ordre 6 en posant $x = \frac{\xi}{\eta}$; l'équation $\varphi = 0$ représente les 6 points de diramation de f.

Il s'agit de classifier les équations $\varphi = 0$ qui admettent un groupe de transformations linéaires en elles-mêmes. Or d'après le théorème de M. Jordan concernant la classification des groupes linéaires, un groupe qui laisse invariant $\varphi = 0$ pourra être:

a) un groupe cyclique d'ordre 2, 3, 4, 5, 6;

b) un groupe diédrique d'ordre 4, 6, 12;

c) un groupe tetraédrique d'ordre 12, ou un groupe octaédrique (exaédrique), d'ordre 24;

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les points de diramation de f, racines de $\varphi = 0$.

Il pourra arriver que $\varphi = 0$ admette une transformation linéaire en elle-même qui soit périodique d'ordre 2, de façon que sur les 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 il se produise une substitution de la forme:

1) $$(1\,2)\ (3\,4)\ (5\,6)$$

ou bien de la forme

2) $$(1\,1)\ (2\,2)\ (3\,4)\ (5\,6).$$

En ce dernier cas il y aura aussi les transformations linéaires

3) $$\begin{gathered}(1\,2)\ (3\,6)\ (4\,5)\\ (1\,2)\ (3\,5)\ (4\,6)\end{gathered}$$

qui engendrent un groupe diédrique 3) d'ordre 4, auquel appartient la substitution 2).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 3 engendré par

4) $$(1\,2\,3)\ (4\,5\,6),$$

il y aura aussi les transformations d'ordre 2

5) $$\begin{gathered}(1\,4)\ (2\,6)\ (3\,5)\\ (1\,6)\ (2\,5)\ (3\,4)\\ (1\,5)\ (2\,4)\ (3\,6).\end{gathered}$$

engendrant un groupe diédrique 5) d'ordre 6, qui renferme 4).

Si $\varphi = 0$ admet un groupe cyclique d'ordre 4 engendré par

6) $$(1\,1)\ (2\,2)\ (3\,4\,5\,6),$$

il y a un groupe octaédrique 7) de 24 substitutions linéaires qui ramènent $\varphi = 0$ en elle-même.

Dans ce groupe sont renfermées 6 substitutions d'ordre 4 analogues à 6) et leurs 3 carrées d'ordre 2 et du type 2), 8 substitutions d'ordre 3, et 6 substitutions d'ordre 2 et du type 1). Il y a:

8) un sous-groupe tetraédrique d'ordre 12 renfermant les 8 substitutions d'ordre 3 et les 3 substitutions d'ordre 2 et du type 2);

9) un sous-groupe de celui-ci, diédrique d'ordre 4, renfermant les 3 involutions nommées;

enfin des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6 appartenant aux types 3), 5), et leurs sous-groupes cycliques.

Si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 5 telle que

10) $$(1\,1)\ (2\,3\,4\,5\,6),$$

il n'y a que le groupe cyclique d'ordre 5 engendré par cette transformation.

Enfin si $\varphi = 0$ admet une transformation d'ordre 6, telle que

11) $$(1\,2\,3\,4\,5\,6),$$

outre le groupe cyclique engendré par celle-ci, il y aura 6 substitutions d'ordre 2 telles que

12) $$\begin{array}{l}(1\,4)\ (2\,3)\ (5\,6);\ \ldots\ldots\ldots \\ (1\,1)\ (4\,4)\ (2\,6)\ (3\,5);\ \ldots\ldots,\end{array}$$

qui engendrent un groupe diédrique d'ordre 12.

Dans ce groupe sont renfermés des sous-groupes diédriques d'ordre 4, 6, semblables aux types 3), 5), et un sous-groupe diédrique d'ordre 6 renfermant les substitutions

13) $$\begin{array}{l}(1\,3\,5)\ (2\,4\,6) \\ (1\,1)\ (4\,4)\ (2\,6)\ (3\,5);\ \ldots\ldots\ldots\end{array}$$

En résumant il y a 13 types différents de groupes de substitutions linéaires qui laissent invariant une forme φ d'ordre 6, mais cette forme ne donne lieu qu'à 6 types différents.

Nous allons écrire, d'après M. Bolza, les formes normales de φ correspon-

dantes à ces types, en distinguant en chaque cas les groupes de transformations qui laissent invariant la courbe

$$f = y^2 - \varphi(x) = 0,$$

et en indiquant à côté de chaque type le tableau des périodes normales appartenant à la courbe f.

On aura donc les types suivants:

I) $$\varphi = \xi^6 + \alpha\xi^4\eta^2 + \beta\xi^2\eta^4 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 4 engendré par les transformations

$$x' = -x,\ y' = y;\ x' = -x,\ y' = -y;\ x' = x,\ y' = -y;$$

b) un sous-groupe d'ordre 2 de celui-ci, outre que $(x' = x,\ y' = -y)$, p. ex.

$$(x' = -x,\ y' = y).$$

Ces groupes correspondent au groupe 1) sur les racines de $\varphi = 0$.

Le tableau normal des périodes de f est

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g', \end{matrix}$$

où

$$h = \frac{1}{2}.$$

II) $$\varphi = \xi(\xi^5 + \eta^5)$$

ou

$$\varphi = x(x^5 + 1).$$

La courbe f admet

a) un groupe cyclique d'ordre 10

$$x' = \varepsilon x,\ y' = e^{\frac{\pi i}{5}} y; \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

b) un sous-groupe d'ordre 5 de celui-ci.

Ces groupes correspondent également à un groupe 10) opérant sur les racines de $\varphi = 0$.

Périodes normales de f:

$$g = 1 - \varepsilon^4, \quad h = -\varepsilon^2 - \varepsilon^4, \quad g' = \varepsilon.$$

III) $$\varphi = \xi \eta (\xi^4 + \alpha \xi^2 \eta^2 + \eta^4)$$

ou

$$\varphi = x (x^4 + \alpha x^2 + 1).$$

Périodes normales de f:

$$g = g', \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 8 qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique engendré par les trois involutions qui laissent invariant $\varphi = 0$ opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme le groupe 3);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 4

$$(x' = -x, \quad y' = \pm i y)$$

qui correspond au groupe 2) sur les racines de $\varphi = 0$.

IV) $$\varphi = \xi^6 + \alpha \xi^3 \eta^3 + \eta^6$$

ou

$$\varphi = x^6 + \alpha x^3 + 1;$$

$$12 g g' + 1 = 0, \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet

a) un groupe d'ordre 12 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 6 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 5);

b) un sous-groupe de a) cyclique d'ordre 6, correspondant au groupe cyclique d'ordre 3 de $\varphi = 0$ (type 4):

$$\left(x' = \varepsilon x, \quad y' = -y; \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

c) un sous-groupe de b) d'ordre 3.

V) $$\varphi = \xi^6 + \eta^6,$$

ou, en changeant η en $i\eta + \varphi = \xi^6 - \eta^6$, d'où l'on tire

$$\varphi = x^6 - 1.$$

On a les périodes

$$g = g' = \frac{i}{2\sqrt{3}}, \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 12 qui laisse invariant $\varphi = 0$ (type 12);

b) un sous-groupe de a) d'ordre 12, qui correspond au groupe cyclique d'ordre 6 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ (type 11);

c) deux sous-groupes cycliques de b), d'ordre 6, engendrés par

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \pm y \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

d) un sous-groupe d'ordre 12 de a), qui est en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique, d'ordre 6, opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 13)

$$\left(\begin{matrix} x' = \varepsilon x, \; y' = \pm y; & x' = \varepsilon^2 x, \quad y' = \pm y; & x' = x, \; y' = \pm y \\ x' = \dfrac{1}{x}, \; y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon}{x}, \quad y' = \dfrac{\pm iy}{x^3}; & x' = \dfrac{\varepsilon^2}{x}, \; y' = \dfrac{\pm iy}{x^3} \end{matrix}\right).$$

La courbe f admet aussi d'autres groupes renfermés en a) et appartenant aux types I), III), IV).

VI) $\qquad \varphi = \xi\eta(\xi^4 + \eta^4)$ ou bien $\varphi = \xi\eta(\xi^4 - \eta^4)$,

ou respectivement

$$y^2 = x^5 + x, \quad y^2 = x^5 - x;$$

$$g = g' = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, \quad h = \frac{1}{2}.$$

La courbe f admet:

a) un groupe d'ordre 48 en isomorphisme diédrique avec le groupe octaédrique de 24 substitutions linéaires, qui laissent invariant $\varphi = 0$ (type 7); et les sous-groupes suivants;

b) groupe d'ordre 24 en isomorphisme diédrique avec un groupe tetraédrique de 12 substitutions linéaires (type 8);

c) groupe cyclique d'ordre 8 correspondant à un groupe 6) sur les racines de $\varphi = 0$:

$$\left(x' = ix, \; y' = \sqrt{i}\,y; \quad \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}}\right),$$

d) groupe d'ordre 8 en isomorphisme diédrique avec le groupe diédrique d'ordre 4 opérant sur les racines de $\varphi = 0$ comme 9).

En outre il y a en a) des sous-groupes des types I), III), IV).

67. *Comment on passe des groupes de la courbe de genre 2, à ceux de la surface de Jacobi associée.* Etant donnée une courbe f appartenant à l'un des types I), . . ., VI), à chaque groupe de transformations de f on peut faire correspondre au moins un groupe de transformations de la surface de Jacobi F associée à f, et cela de la façon suivante: remplaçons tout couple de f par le point homologue F; à toute transformation de f, considérée comme opérant sur les couples de la courbe, répondra ainsi une transformation de F; pourtant on aura sur F un groupe de transformations isomorphe à celui de f, et qui laisse invariant le point homologue à la g_2^1 de f.

Réciproquement, si l'on a un groupe de transformations de F, qui laissent invariant un même point uni O de la surface, on peut toujours considérer une courbe f associée à F de façon qu'au point O corresponde la g_2^1 de f; cette courbe f admet un groupe de transformations isomorphe au groupe de F (n. 65), et celui-ci prendra naissance du groupe de f, par la construction précédente.

Cependant il peut arriver qu'à un groupe de f (appartenant à un des types que nous avons analysés) correspondent plusieurs groupes de F, isomorphes entre eux, mais birationnellement distincts; dans ce cas il y aura des groupes de F n'admettant pas des points unis communs à toutes leurs transformations. Ce cas ne saurait donc se présenter lorsqu'il s'agit de groupes cycliques, car toute transformation cyclique T de la surface F, associée à une courbe f irréductible, a des points unis (n. 58), qui sont unis aussi pour les puissances de T.

D'après ces remarques, nous aurons lieu d'analyser les types différents de groupes de F, qui peuvent correspondre à un même groupe de f, lorsqu'il s'agit d'un groupe qui n'est pas cyclique.

Mais parmi les groupes de F il y en a qui donnent lieu à des involutions représentées par des surfaces réglées; ce sont là des cas de surfaces hyperelliptiques que nous devons écarter d'après le n. 4.

Nous commençons par l'examen de ces cas.

68. *Cas à écarter.* En premier lieu considérons le cas I, b).

On obtient sur F une transformation périodique d'ordre 2, qui admet une courbe de points unis; en effet ce sont des points unis pour cette transformation les ∞^1 points de F qui représentent les couples de l'involution elliptique engendrée sur f par la transformation

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Ainsi le cas I, b) nous amène à une involution qui ne correspond pas à une surface hyperelliptique proprement dite (n. 4).

Or les groupes I, a); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), renferment tous un sous-groupe d'ordre 2 du type I, b); partant les involutions correspondantes à ces groupes possèdent un nombre infini de coïncidences, et amènent à des surfaces qu'on peut transformer en des réglées (n. 35). On en conclut que les cas I); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a) sont à écarter.

Nous venons d'écarter une première série de cas qui nous amènent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes. Pour ce qui concerne les autres types, on reconnait d'abord aisément qu'ils correspondent à des involutions ayant un nombre fini de coïncidences, et par suite régulières (n. 37).

Mais on verra que les cas cycliques II) et VI, c) donnent lieu à des involutions rationnelles et pour cette raison doivent être écartés ainsi que les précédents.

A cet effet il faut calculer la valeur du genre $p_a = p_g$ appartenant à chacune des involutions que nous venons de construire sur F.

Ce calcul peut être fait de deux manières différentes: on peut calculer le p_a, ou bien le p_g; nous savons que les deux valeurs sont égales.

Pour calculer le p_a on peut procéder de la manière suivante.

Soit Φ une surface représentant une involution donnée sur F. Considérons un faisceau de courbes appartenant à Φ et le faisceau homologue sur F; en considérant dans chaque faisceau les courbes douée d'un point double, on pourra évaluer les invariants de ZEUTHEN-SEGRE de Φ, F; celui de Φ se trouvera exprimé par celui de F, et d'après la formule connue on en tirera la valeur du genre numérique p_a de Φ.[1]

Ce calcul présente une seule difficulté remarquable: c'est qu'aux points de coïncidence de l'involution donnée sur F, correspondent des points singuliers et il s'agit de reconnaître combien de fois les courbes du faisceau considéré sur Φ, qui passent par ces points, doivent être comptées parmi celles qui ont un point double (il est sous entendu que le faisceau dont on parle n'a pas comme points-base ces points singuliers).

La difficulté que nous venons de signaler se ramène d'ailleurs à la question suivante: étant donné sur F un système linéaire de courbes appartenant à l'involution, reconnaître quelles singularités acquièrent les courbes du système lorsque on leur impose de passer par des points de coïncidence.

[1] Ce procédé fournit en général la relation entre les genres numériques de deux surfaces en correspondance $[1\ n]$, c'est-à-dire la formule de M. SEVERI que nous employerons dans les ch. suivants.

Nous aurons lieu de traiter en détail cette question qui se rattache à la construction effective des surfaces hyperelliptiques que nous venons de classifier. Nous verrons alors que les types III, b); IV, b); V, d); VI, b), d) nous amènent à des surfaces de genre $p_a = 1$.

Ce même procédé de construction nous a fait découvrir que les surfaces correspondantes aux types II) et VI, c) sont rationnelles. Mais sans répéter ici cette construction qui nous amène en somme à un résultat négatif, nous verrons que ce résultat peut être établi plus simplement aussitôt que l'on ait reconnu que $p_a = p_g = 0$.

A cet effet on peut s'appuyer sur une simple remarque de MM. Bagnera et de Franchis, remarque qui permet d'évaluer le p_g des surfaces Φ.

Cette remarque consiste en ce que s'il y a une integrale double de première espèce attachée à Φ, cette intégrale devra se réduire à $\int\int du\, dv$ lorsqu'on exprime les coordonnées des points de Φ par des fonctions rationnelles des points de F, et par conséquent par des fonctions hyperelliptiques de u, v. Il s'ensuit que si l'involution (cyclique) représentée par Φ est engendrée par la transformation

$$u' = \alpha u + \beta v$$
$$v' = \gamma u + \delta v,$$

le déterminant Jacobien de cette transformation sera

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Ceci posé, il suffit de reconnaître la forme des substitutions linéaires sur u, v engendrant les involutions des différents types considérés sur F.

Envisageons d'abord le cas II, b).

La courbe

$$y^2 = x(x^5 + 1)$$

possède deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\, dx}{y}, \quad v = \int \frac{dx}{y}.$$

Par la substitution

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = \varepsilon^3 y \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)$$

qui transforme la courbe en elle-même, les intégrales u, v viennent changées en

$$u' = \varepsilon^4 u, \quad v' = \varepsilon^3 v.$$

La même substitution subissent les sommes donnant lieu aux intégrales attachées à la surface de Jacobi F, qui correspond à la courbe. Comme le déterminant de cette substitution est $\varepsilon^2 \neq 1$, on en conclut que la surface Φ correspondante à l'involution du type II, b) a le genre $p_g = 0$.

Par conséquent il en est de même de la surface correspondante au type II, a), qui représente une involution appartenante à la surface II, b).

Envisageons maintenant le cas VI, c).

La courbe

$$y^2 = x\,(x^4 + 1)$$

possède les deux intégrales de première espèce

$$u = \int \frac{x\,dx}{y}, \quad v = \int \frac{dx}{y},$$

et par la substitution

$$x' = i\,x, \quad y' = \sqrt{i}\,y$$

il vient

$$u' = \frac{-1}{\sqrt{i}}\,u, \quad v' = \sqrt{i}\,v,$$

de sorte que le déterminant de la substitution est -1. On en déduit que l'involution cyclique d'ordre 8 correspondante au type VI, c), a $p_g = 0$.

Le procédé que nous avons rapidement exquissé nous amène à la conclusion que les involutions correspondantes aux cas II) et VI, c) ont le genre

$$p_a = p_g = 0.$$

Nous allons prouver en outre que leur bigenre n'est pas $P_2 = 1$, de sorte que, d'après le n. 31, on pourra conclure que ces involutions sont rationnelles.

Posons-nous d'abord dans le cas II, b), et en supposant $P_2 = 1$, construisons une surface Φ image de l'involution, qui ne possède pas des courbes exceptionnelles.

Étant $P_2 = 1$, il y aura sur Φ deux systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$, sans points-base, adjoint l'un à l'autre, auxquels correspondent sur F deux systèmes linéaires renfermés dans le même système complet; on a donc

$$|5\,C| = |5\,C'|$$

et par suite

$$P_5 = 1.$$

Cette conclusion est absurde attendu que la surface Φ, ayant $p_g = 0$ et étant dépourvue de courbes pluricanoniques d'ordre > 0, on doit avoir (n. 31)

$$P_5 = 0.$$

Maintenant on peut affirmer aussi que la surface correspondant au cas II, a), est rationnelle. En effet cette surface vient représentée par une involution de couples de points appartenant à la surface qui correspond au cas II, b); et, d'après M. Castelnuovo, toute involution sur une surface rationnelle est rationnelle.

Considérons enfin le cas VI, c).

La surface Φ vient représentée par une involution de couples de points, I_2, appartenant à la surface régulière Φ' qui correspond au cas III, b); et il est aisé de remarquer qu'il y a sur Φ' des coïncidences correspondant à la g_2^1 de f. D'après le n. 38 on conclut donc que cette involution I_2 est rationnelle, puisqu'elle ne saurait avoir $P_2 = 1$.

En résumant les résultats obtenus nous dirons que les cas I); II); III, a); IV, a); V, a), b), c); VI, a), c) *correspondent à des surfaces hyperelliptiques dégénérescentes, qui sont écartées de notre étude.*

69. — *Genres des surfaces hyperelliptiques correspondantes aux types qui ne sont pas dégénérescentes.* — En calculant la valeur du déterminant des substitutions linéaires périodiques d'ordre 3, 4 qui forment les groupes III, b); IV, b); V, d); VI, b), d), on reconnaît que ces types nous amènent à des surfaces de genre $p_g = 1$. Ainsi donc nous pouvons énoncer dès à présent la conclusion suivante qui sera établie à posteriori dans la suite:

Les cas III, b); IV, b); V, d); VI b), d), *correspondent à des surfaces hyperelliptiques de genres*

$$p_a = p_g = 1 \qquad (P_2 = 1).$$

Parmi ces cas nous avons déjà remarqué que les groupes cycliques [tels que III), IV)] correspondent chacun à un type bien déterminé d'involution sur la surface de Jacobi F, involution possédant un point uni pour toutes les transformations du groupe.

Il reste à classifier les types qu'on peut appeler *bi-diédriques* et *bi-tetraédriques*, c'est-à-dire les types correspondants à des groupes bidiédriques d'ordre 8 (VI, d) et 12 (V, d) et les types correspondants à des groupes bi-tetraédriques (VI, b).

70. — *Analyse des groupes bi-diédriques et bi-tetraédriques, d'ordre* 8, 24, *appartenant à une surface de Jacobi.* — Considérons une surface F correspondante au cas VI). On aura sur F plusieurs types de groupes G_8 et G_{24} isomorphes au groupe bi-diédrique d) et au groupe bi-tetraédrique b) de f. Tâchons de construire ces types.

Un groupe G_8 se trouvant en isomorphisme diédrique avec un G_4 engendré par deux involutions échangeables (Vierergruppe), on pourra l'engendrer par deux transformations cycliques d'ordre 4, U_1, U_2, qui ne seront pas échangeables, mais dont l'une transformera l'autre en son inverse; U_1^2, U_2^2 donneront lieu à la même transformation K, qui sera une transformation ordinaire de 1re espèce de la surface F. On peut supposer que dans la correspondance point par couple entre la surface F et la courbe f, K réponde à la g_2^1 de f.

Ceci posé, rappelons-nous que la transformation K possède 16 coïncidences (n. 46). En ayant égard aux propriétés des points unis de la transformation périodique d'ordre 4 qui résulte définie sur f, on déduit aisément, au moyen de considérations qu'on trouvera développées en détail au n. 84, qu'une transformation hermitienne donnant pour carré K, laisse invariant quatre coïncidences de K et distribue les autres coïncidences en six cycles de 2de ordre.

Soient P, Q, R, S les points unis de la transformation U_1. Comme U_2 doit transformer U_1 en son inverse, U_2 changera en lui-même le groupe P, Q, R, S.

Il y aura donc à distinguer quatre hypothèses:

1) La transformation U_2 laisse invariant P. Alors toutes les transformations du groupe G_8 engendré par U_1, U_2, ont en commun le point uni P et par suite elles laissent invariant la variété ∞^1 — birationnellement identique à f (n. 21) — formée par les courbes C passant par P et appartenant à un système Σ quelconque. Le groupe G_8 vient correspondre ainsi, au moyen de la correspondance point par couple entre F, f, au groupe bi-diédrique d).

Dans ce cas on voit de plus (n. 92) que U_2 laisse aussi invariant les autres points unis Q, R, S de U_1.

2) Les couples (P, Q) (R, S) donnent deux cycles de 2de ordre de la transformation U_2. Un groupe G_8 de ce type existe effectivement.

En effet pour le construire il suffit de considérer les substitutions U_1, U_2 génératrices du type 1) et de poser

$$U'_1 \equiv U_1, \qquad U'_2 \equiv U_2 A,$$

A étant la transformation de 2de espèce qui fait correspondre Q à P.

Nous désignerons par G'_8 le groupe engendré par U'_1, U'_2 en réservant le symbole G_8 pour le type 1).

3) Les couples (P, R) (Q, S) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G''_8 correspondant à ce cas, en prenant pour substitutions génératrices

$$U''_1 \equiv U_1, \qquad U''_2 \equiv U_2 B,$$

B étant la transformation de 2^de^ espèce qui amène P en R.

4) Les couples (P, S) (Q, R) donnent deux cycles de U_2. On obtient le groupe G'''_8 correspondant, en posant

$$U'''_1 \equiv U_1, \qquad U'''_2 \equiv U_2 C,$$

où C est la transformation de 2^de^ espèce qui fait correspondre S à P.

On a ainsi à priori sur la surface F 4 types de groupes bi-diédriques formés par des transformations hermitiennes.

Une analyse plus approfondie, que nous renvoyons à un autre chapitre de ce mémoire, nous montrera que les quatre points unis P, Q, R, S de la transformation U_1, se distribuent en deux couples (P, Q) (R, S), de sorte que les points d'un couple jouissent des mêmes propriétés et ils se comportent de la même façon par rapport aux points de l'autre couple.

On verra ainsi que les types G''_8, G'''_8 ne sont pas distincts. On aura donc en définitive *trois types de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-diédriques d'ordre* 8 *de la surface* F [cas VI)].

Il est aisé maintenant de construire sur F les différents types de groupes G_{24} isomorphes au groupe bi-tetraédrique VI, b) de f.

On partira de la remarque que tout groupe G_{24} renferme un sous-groupe invariant bi-diédrique G_8.

Or donnons-nous sur F un groupe bi-diédrique appartenant à l'un des types que nous venons de définir, et tâchons de construire un groupe bi-tetraédrique qui le renferme comme sous-groupe invariant.

On aura les cas suivants:

1) Le groupe bi-diédrique donné est le G_8 du type 1), dont toutes les substitutions laissent invariant les points P, Q, R, S.

Dans ce cas le G_{24} cherché échangera entr'eux les points P, Q, R, S suivant un groupe de substitutions G_r, qui se trouve en isomorphisme mériédrique avec G_{24}. Comme au G_8 correspond en cet isomorphisme la transformation identique, on aura $r = 3$, et par conséquent le groupe $G_r = G_3$ sur (P, Q, R, S) sera cyclique d'ordre 3, et laissera invariant un point parmi les quatre: p. ex. le point P.

Il s'ensuit que le groupe G_{24} a sur F un point uni que l'on peut supposer correspondant à la g^1_2 de f; on a ainsi un premier type bien défini de groupe bi-tetraédrique.

2) Le groupe bi-diédrique donné est le groupe $G_8^{(j)}$ du type j) où $j = 2, 3, 4$.

Les trois substitutions

$$U_1^{(j)}, \quad U_2^{(j)}, \quad U_1^{(j)} U_2^{(j)},$$

(d'ordre quatre) existant en $G_8^{(j)}$ possèdent trois groupes de 4 points unis, qui n'ont pas des points communs.

Sur le groupe des quatre coïncidences restant de la transformation K, les substitutions de $G_8^{(j)}$ produisent un groupe diédrique G_4.

Les mêmes quatre points devront être échangés entr'eux par le groupe bi-tetraédrique cherché — que nous désignerons par $G_{24}^{(j)}$ — suivant les substitutions d'un groupe tetraédrique G_{12}, qui renferme G_4 comme sous-groupe invariant.

Or ce groupe G_{12} résulte ainsi bien déterminé, et l'on en déduit que le groupe $G_{24}^{(j)}$ résulte aussi bien déterminé.

On en conclut qu'il y a tant de surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes correspondantes à des groupes bi-tetraédriques, que de surfaces distinctes correspondantes aux groupes bi-diédriques, c'est-à-dire qu'il y aura sur F (cas VI) *trois types différents de groupes bi-tetraédriques d'ordre* 24, *amenant à des surfaces hyperelliptiques birationnellement distinctes.*

71. — *Groupes bi-diédriques d'ordre* 12. — La courbe f appartenant au type V), elle admet un groupe de transformations en elle-même V, d), c'est-à-dire un groupe G_{12} bi-diédrique d'ordre 12.

Combien de groupes isomorphes à G_{12} peut-il y avoir sur la surface de Jacobi F associée à f?

Il est aisé de répondre à cette question en remarquant que G_{12} admet un sous-groupe invariant G_6 cyclique d'ordre 6; en effet dans le groupe diédrique d'ordre 6 qui est en isomorphisme émi-édrique avec G_{12}, il y a un sous-groupe invariant d'ordre 3, et à celui-ci correspond en G_{12} un G_6 du type IV, b).

Ceci posé remarquons encore que le G_6 du type IV, b) donne lieu à un groupe de transformations de F ayant *un seul* point uni qui correspond à la g_2^1 de f; il s'ensuit qu'un groupe d'ordre 12 de F renfermant un tel sous-groupe invariant, a un point uni (invariant par rapport à toutes les transformations du groupe). En rappelant ce que nous avons dit au n. 67 on en conclut que:

Sur une surface F associée à la courbe f (cas V) *il y a un seul type de groupe bi-diédrique d'ordre* 12, *en considérant comme identiques deux groupes amenant à des surfaces hyperelliptiques en correspondance birationnelle entre elles.*

72. — *Résumé et programme de l'étude qui suit.* — En résumant les résultats obtenus nous énoncerons le théorème suivant:

Les surfaces hyperelliptiques de rang $r > 1$ et de diviseur $\delta = 1$, admettant une représentation propre par des fonctions Θ irréductibles, sont des surfaces régulières de genres $p_a = p_g = P_2 = \cdots = 1$. Elles se partagent en 11 familles birationnellement distinctes, correspondantes à des groupes de transformations d'une courbe de genre 2 en elle-même. Ces familles sont indiquées par le tableau suivant:

surfaces dépendantes de trois modules:

I) $r = 2$ *(surface de Kummer);*

surfaces dépendantes d'un module:

II) $r = 3$ *(groupe cyclique d'ordre 3);*

III) $r = 4$ *(groupe cyclique d'ordre 4);*

IV) $r = 6$ *(groupe cyclique d'ordre 6);*

surfaces n'ayant pas de modules:

V, VI, VII) $r = 8$ *(groupes bi-diédriques d'ordre 8);*

VIII) $r = 12$ *(groupe bi-diédrique d'ordre 12);*

IX, X, XI) $r = 24$ *(groupes bi-tetraédriques d'ordre 24).*

Les nombres I—XI (qui n'ont rien à faire avec ceux employés avant dans la classification des courbes de genre 2 admettant des transformations en elles-mêmes), nous servirons dans la suite pour désigner les différents types de surfaces hyperelliptiques que nous nous proposons d'étudier en détail.

Pour chaque type nous allons construire une surface projectivement définie (dépendant suivant les cas de modules arbitraires), à laquelle toute surface hyperelliptique du type donné peut être ramenée par une transformation birationnelle.

Les surfaces modèles que nous allons construire pour $r > 2$, seront des surfaces d'ordre $2r$ appartenant à des espaces S_{r+1} de dimension > 3, et seront caractérisées par certaines configurations de points singuliers et de hyperplans ayant un certain contact suivant des courbes rationnelles.

Il sera aisé d'ailleurs de projeter de telles surfaces dans l'espace ordinaire, et même d'en abaisser l'ordre (jusqu'à 4). Cependant les surfaces d'ordre plus élevé d'un hyperespace, auxquelles nous nous rapportons, sont en général les plus simples de leur classe à ce point de vue, que leur configuration caractéristique jouit de la plus grande symétrie possible.